П. Бърнев П. Станчев

РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

НАРОДНА ПРОСВЕТА

ПЕТЪР БЪРНЕВ
ПЕТЪР СТАНЧЕВ

РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

ДЪРЖАВНО ИЗДАТЕЛСТВО
„НАРОДНА ПРОСВЕТА“
СОФИЯ, 1987

Книгата представлява въведение в света на размитата математика, която е средство за по-прецизно описване на обекти и явления от реалния свят. Размитата математика дава възможност да се отчитат субективни фактори, които водят до неточности при моделиране. Тя е особено удобна за прилагане в обществени и хуманитарни науки.

В книгата се дават основни сведения за теорията на множествата, графите и вероятностите. На тяхна база се разглеждат множества, за които не е точно определено дали даден елемент принадлежи към тях, или не принадлежи.

Разгледани са приложения на размитата математика в лингвистиката, при вземане на решения, в информатиката, в управлението, в изкуствения интелект, в изследване на операциите, в медицината и биологията, в икономиката и географията.

Книгата е предназначена за ученици. Тя може да служи като допълнение към основния курс по математика. Може да бъде полезна и в изследователската и приложна дейност на математици, инженери, икономисти, лингвисти, философи и др.

519.92

ПРЕДГОВОР

Реалните обекти и явления са неизчерпаемо сложни. Хората често се стремят да ги упростят, като използват някои абстрактни понятия. Например повърхнината на морето (дори бушуващо) при някои разглеждания се приема за геометрична равнина, на малките деца се обяснява, че някои животни са добри, а други лоши, хората делим на здрави и болни и т. н. Но в редица случаи отнасянето на даден обект към някое строго определено множество от обекти не е уместно. Хората търсят средства за по-пълно отразяване на реалния свят. С тази цел възникна и бързо се развива така наречената размита математика, чиято основа е теорията на размитите множества. Тази теория се зароди през 1965 г., когато в международното списание „Информатика и управление" се появи статията на известния американски специалист по проблемите на управлението на големи системи Лотфи Заде, озаглавена „Fuzzy Sets" [30]. Думата „sets" означава „множества", а думата „fuzzy" се превежда като „неясен", „неопределен". На руски език се появиха различни наименования за тези множества, които на български език могат да се преведат като „размити", „неточни", „мъгляви", „развлечени", „неясни", „безформени" „смътни", „неотчетливи", „размазани" и т. н. В нашия език все повече се утвърждава терминът „размити множества".

Както всяка нова теория и теорията на размитите множества има ентусиазирани привърженици, има и неприятели. Много математици критикуват тази теория от различни позиции. Независимо от това теорията се развива и укрепва. Публикувани са много статии и книги, в които се развива и популяризира теорията на размитите множества и нейни приложения, издават се няколко международни списания и се провеждат международни конференции по тези въпроси. Във факултета по математика и механика при Софийския университет от 1981 г. се чете спецкурс „Размити множества и информатика".

Към теорията на размитите множества проявяват инте-

рес не само математици. От нея се интересуват инженери, конструктори, проектанти, социолози, педагози, лекари, музиканти, художници, лингвисти и специалисти от много други области.

За размитите множества са издадени много хубави книги, като тритомната „Въведение в теорията на размитите множества" на А. Кофман (на френски език), от която първият том е преведен и издаден на руски език през 1982 г. [21]; книгата на Д. Дюбоа и Х. Прад „Размити множества и системи" (на английски език) [19] и др. На български език за размитите множества все още малко е писано. В тази насока е статията на П. Станчев „Що е размито множество", публикувана в сп. „Математика", бр. 3, 1981 г. [17], има и няколко научни статии в периодични издания. С тази книжка авторите целят да дадат възможност на широк кръг български читатели и преди всичко на любознателните български ученици да се запознаят с основите на теорията на размитите множества и с някои възможни приложения на тази теория.

Книгата се състои от четири глави. Първата глава представлява въведение в теорията на размитите множества. Във втората глава за улеснение на читателя се дават основни сведения за теорията на множествата, графите и вероятностите, като изложението е ориентирано така, че да улесни прехода от обикновени към размити множества. В третата глава се описва теорията на размитите множества, а в четвъртата глава — някои приложения на тази теория. В края на всяка глава (с изключение на първата) се дават задачи за самостоятелна работа.

Книгата завършва с указател на основните използвани термини и указател на използваните означения.

Читатели, които познават теорията на множествата, могат да прескочат съответната част от втора глава.

Книгата е написана по инициатива на П. Бърнев, като планът на изложението е изготвен от двамата автори. П. Бърнев написа предговора и първа глава, а П. Станчев написа останалите три глави.

Авторите благодарят на рецензентите Геро Геров и Кирил Атанасов за направените препоръки и бележки и на Мария Благоева за прецизната редакторска работа.

АВТОРИТЕ

ГЛАВА 1

УВОД В СВЕТА НА РАЗМИТАТА МАТЕМАТИКА

1.1. ПОНЯТИЕТО „СТОЛ“

Има ли някой да не знае какво е това стол, маса, чаша, нож? Уважаеми читателю, преди да съдим за другите, нека да проверим себе си. За определеност да се спрем на думата „стол“. Да се каже, че нещо, върху което се сяда, е стол, не е уместно — случва се да сядаме и върху масата, и на камък, и на земята. Можем да се опитаме да отстраним последните възможности, като добавим, че столът има облегалка. Но така ли е наистина? Ами, ако допълним определението с това, че столът има крака? Но и магарето има крака и можем да седнем върху него.

Да кажем, че столовете са от дърво? Пак не може — правят се и от метал, пластмаси.

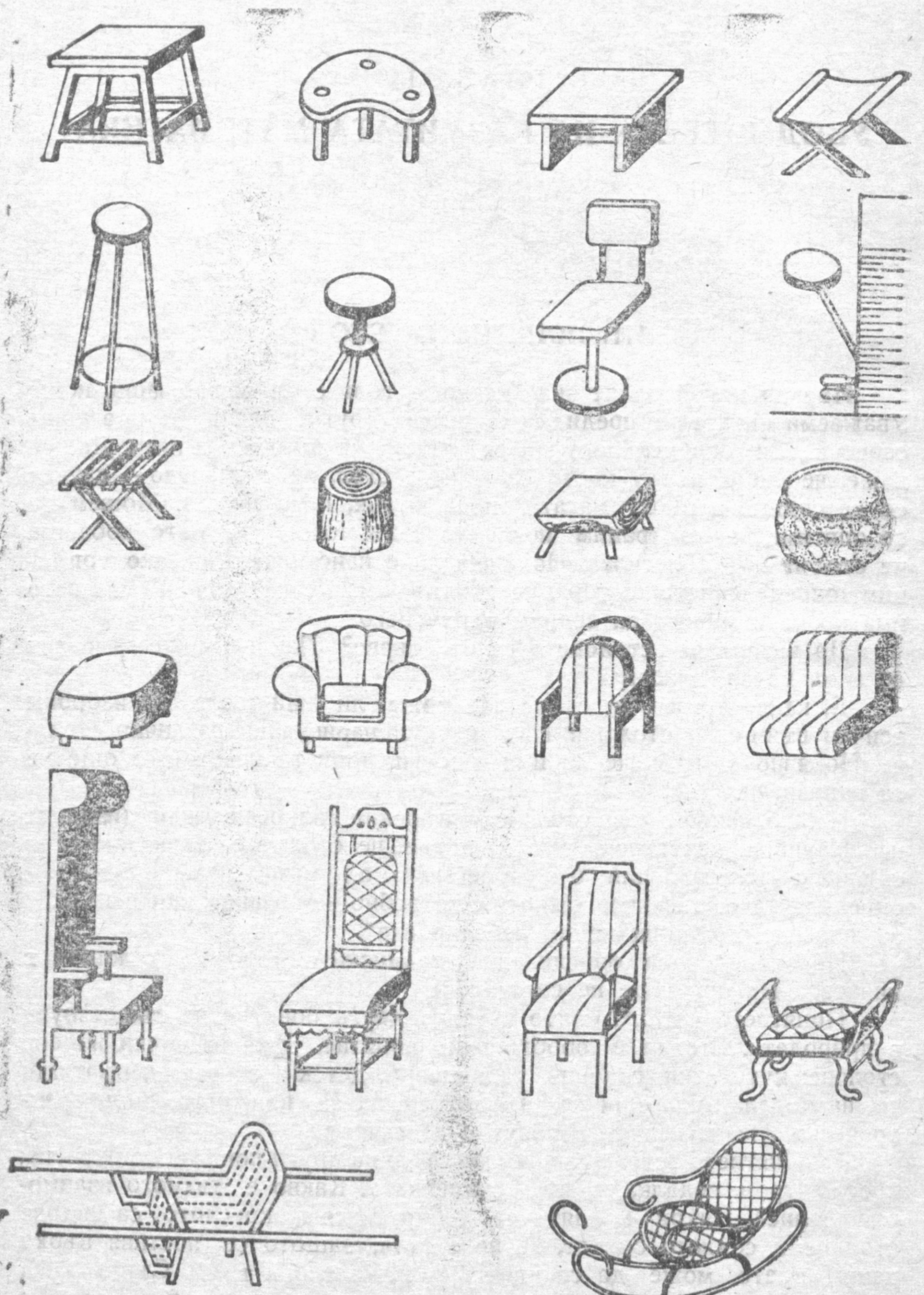
Е, какво тогава е стол? Не може ли най-после да изброим всички възможни столове? На фиг. 1 са нарисувани различни столове. Но явно е, че може да има и други, дори такива, които още не са направени.

И така, какво е това стол? В българския тълковен речник (издание на „Наука и изкуство“, 1976 г.) пише, че столът е „покъщнина за сядане с облегало или без облегало“, а думата „покъщнина“ се определя така: „всичко, каквото е потребно за обзавеждане на къща за живеене, домашни вещи, мебелировка“.

Но според това определение градинските столове, столовете в кината, сладкарниците не са столове.

Понятието „стол“, както и всяко друго понятие, не съществува в природата. Столът е обобщаващо понятие. Има различни видове столове: кухненски, салонни, тапицирани, детски, сгъваеми, въртящи се, на колела, люлеещи се, зъболекарски, за инвалиди, дори електрически. Не на всички е приятно да се сяда.

С понятието „стол“ са свързани редица други понятия: табуретка, кресло, трон, седалка, седло, скамейка... Какво е тяхното взаимоотношение? Някои мислят, че табуретката и креслото са видове столове, а седлото смятат, че не е стол, защото се поставя върху нещо, което може да се движи (кон, колело и т. н.). Също така скамейката и канапето могат да не се приемат за столове, понеже



Фиг. 1. Столове

са предназначени за повече от един човек. Но тези твърдения общо-
приети ли са?

Може да има и столове, които не могат да се употребяват за
сядане, напр. столове играчки, столове сувенири. Правилно ли е да
ги наричаме столове?

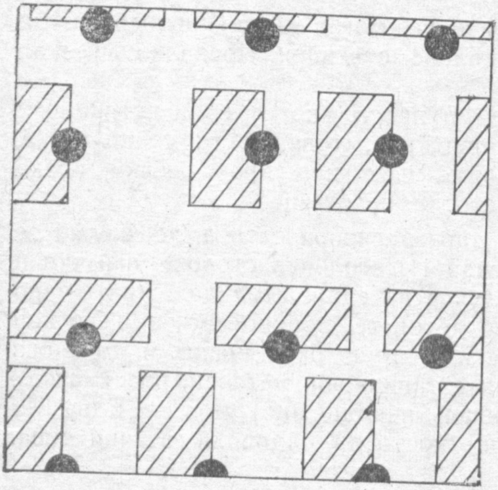
Може да си поставим и друг въпрос. Ако от един четирикрак
стол счупим малка част от единия крак, това, което се получава,
стол ли е? А ако счупим по-голяма част, цял крак, всички крака
или ако продъним стола? Кога столът престава да е стол?

И така, столът може да се характеризира с това, че служи за
сядане (но невинаги — има „лежащи“ столове, столове играчки и
т. н.) на един човек (но се случва на един стол да сядат и по
няколко човека — напр. майка с дете), че обикновено има четири
крака (но съществуват столове и с друг брой крака и дори без
крака), че е дървен (но може да е тапициран, метален, пластмасов),
преносим (но може и да е закрепен неподвижно) и т. н. Едва ли
може да се намери определение, което да задоволи всички хора.

1.2. НЯКОИ РАЗМИТИ СИТУАЦИИ

Едва ли е нужно да се убеждаваме повече, че определянето
дори на такова сравнително просто понятие, каквото е понятието
„стол“, не е леко. Множеството от възможни столове няма напъл-
но ясни граници. Както се казва, то е размито. Още по-големи са
трудностите при определяне на по-общи и по-абстрактни понятия,
като например мебел, цвят, предмет, дължина, творчество, мисъл,
наука и т. н. При разговор с други хора ние често чуваме и упот-
ребяваме такива думи. Влаганият от събеседниците смисъл в думи-
те обикновено е близък, за това ние се разбираме с тях. Но не са
редки случаите при които възникват спорове, тъкмо защото споре-
щите говорят за понятия, които в общи линии разбират по сходен
начин, но се различават в някои детайли, и те са причина изводите,
които правят двете страни да са противоречиви.

Подобни сутуации възникват и в много други случаи. Да разгле-
даме например задачата: Колко точки и колко правоъгълници са на-
рисувани на фиг. 2? Според някои броят на правоъгълниците е 4
(броят се само правоъгълниците, които не са изрязани от рамката);
според други броят на правоъгълниците е около 8 (взимат се пред-
вид и частите на изрязаните правоъгълници); трети определят, че
правоъгълниците са 14 (но с различни размери), четвърти — 15
(включват и рамката), пети — забелязват, че само три фигури са
правоъгълници (рамката и двата правоъгълника, които не са пресе-
чени от „точки“). Възможни са и други мнения, например, че изобщо



Фиг. 2. „Правоъгълници“ и „точки“

няма нарисувани правоъгълници, защото ъглите на четириъгълниците едва ли са прави в абсолютния смисъл на думата. Причина за разногласията в случая е различното разбиране на понятието правоъгълник.

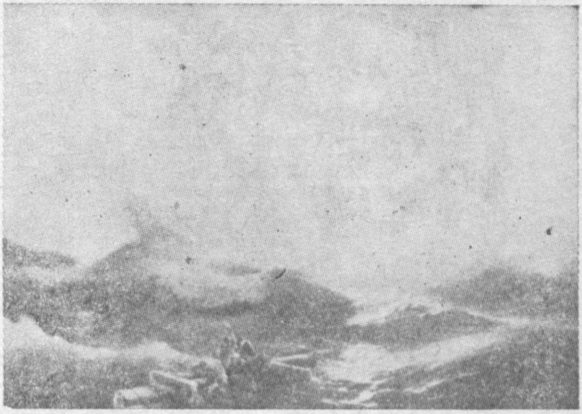
Аналогични разногласия могат да възникнат относно броя на изобразените на фигурата точки. Някои ще възприемат като точки черните кръгове, други и полукръговете, трети може да смятат, че са изобразени безброй много точки и т. н.

На пръв поглед затрудненията могат да бъдат избягнати, ако задачата се формулира точно, но това по различни причини нито винаги е възможно, нито е желателно. Динамичността и многообразието на явленията в света затруднява строго фор-

Фиг. 3. П. Пикасо, Дон Кихот и Санчо Панса

Фиг. 4. Е. Мунх, Целувка (гравюра на дърво)

мализираното им описване, а наличието на такива описания в много случаи не облекчава, а затруднява общуването между хората. Неслучайно различните езици изобилстват с нестрого определени понятия.



Фиг. 5. И. Айвазовски, Девета вълна

Да разгледаме още няколко примера. Можем ли да определим контурите на фигурата на Дон Кихот от рисунката на Пабло Пикасо (фиг. 3) или контурите на всяка от двете човешки фигури от гравюрата на Едвард Мунх (фиг. 4)? Трудно можем да определим и границите между море и небе в платното на Иван Айвазовски (фиг. 5). Но тези затруднения не са основание да смятаме рисунките за нереалистични.

1.3. СЪЩНОСТ НА РАЗМИТИТЕ МНОЖЕСТВА

Множествата, както е известно, се задават, като се определи кои елементи им принадлежат. Това лесно се прави чрез изброяване, когато множеството съдържа краен брой елементи и този брой не е голям. В останалите случаи множеството обикновено се задава, като се зададат свойствата, които трябва да удовлетворяват неговите елементи. Това може да се направи сравнително лесно в случаите, когато се разглеждат множества от абстрактни елементи, например множеството от всички прави, които са успоредни на една дадена права.

Значително по-сложно се определя кои са елементите на някои множества от реални обекти.

Да разгледаме един пример. Към края на 19 в. във Франция съществуват две крупни художествени течения в областта на изобразителното изкуство — реализъм и импресионизъм. Някои художествени произведения, създадени по това време, например картината на Едуард Мане — „Закуска“ — 1868 г. (фиг. 6), отчасти могат да се причислят към множеството на импресионистичните художествени произведения, отчасти — към реалистичните. Друг пример е мно-

Фиг. 6. Е. Мане, Закуска

жеството от хората, притежаващи чувство за хумор. Свойствата на тези обекти невинаги могат да бъдат строго определени, а понякога те не са постоянни. Поради това различните хора дават различни преценки дали даден обект принадлежи на множеството.

Вместо да се определя дали даден обект принадлежи, или не принадлежи на определено множество, може да се възприеме по-гъвкав подход — да се определи в каква степен е приемливо да се смята, че обектът принадлежи на множеството. Ако, както обикновено се прави, приемем числото 0 да означава, че обектът не принадлежи на разглежданото множество, а числото 1 — че обектът безусловно принадлежи на множеството, то можем да разглеждаме и степени на принадлежност, които са числа между нула и едно. При това по-близките до единица числа ще означават поголяма приемливост на твърдението, че обектът принадлежи на множеството.

Така в разглеждания пример чувството за хумор на учениците Асен, Борис, Васил, Георги, Димитър и Емил може да се оценява от десетчленно жури, като всеки член на журито дава оценка 0 или 1 и средното аритметично от тези оценки да определи доколко даденият ученик принадлежи към множеството хора, имащи чувство за хумор. Разбира се, на членовете на журито би могло да се разреши да дават оценки освен 0 и 1 и произволни числа между 0 и 1. По този начин за всеки преценяван ученик ще бъде определена степен на принадлежност към множеството на хората с чувство за хумор.

Например може да се получи следният резултат: Асен — 0,9, Борис — 0,2, Васил — 0, Георги — 0,5, Димитър — 1, Емил — 0,7. По този начин множеството на учениците с чувство за хумор според журито включва несъмнено Димитър, но в определена степен и останалите ученици, с изключение на Васил. Иначе казано, от изходното множество от шест ученици се получава размито множество. То може да се разглежда като обикновено множество, състоящо се от двойките (ученик — оценки): (Асен — 0,9, Борис — 0,2 и т. н.). За удобство в размитото множество ще включим и двойката (Васил — 0).

За същите ученици можем да поставим въпроса, кои от тях са добре възпитани. Така ще получим друго размито множество.

Изобщо, като се ползва някое изходно множество, могат да се определят различни размити множества. Естествено, изходното множество може да не е едно и също при различни ситуации.

Степените на принадлежност към дадено множество могат да се определят по различни начини — чрез анкетиране, експертни оценки, измерване. Обикновено при определяне на степените на принадлежност влияят субективни фактори. Чрез осредняване на мненията на различни лица субективността на оценките в известна степен се намалява.

Обстоятелството, че определянето на размитите множества не е напълно обективно, а отразява мнението на отделно лице или група лица, не бива да ни смущава. Напротив, по този начин ние разполагаме с възможност да отчитаме и използваме мнението на отделни специалисти, на експертни групи, на различни слоеве от населението и т. н.

1.4. ПРИМЕРИ НА РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ С РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

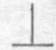
Да разгледаме множеството от посочените в първия ред на следващата таблица (фиг. 7) осем фигури и четири техни характеристики: „заоблени“, „разпространени“, „красиви“, „плътни“. Тези характеристики определят четири различни размити множества на използваното в случая множество, състоящо се от осемте фигури.

В горната половина на таблицата са посочени (според авторите) степените на принадлежност на фигурите към всяко от размитите множества. Разбира се, други лица могат да имат друго мнение по въпроса.

След като някои размити множества са определени, могат да бъдат образувани други размити множества чрез прилагане на различни операции: обединение („или“), сечение („и“), допълнение към множеството на всички разглеждани фигури („не“) и т. н. Тези операции обикновено се определят по следния начин:

Обединението на две размити множества над дадено множество е размито множество (над същото множество), в което степента на принадлежност на всеки елемент е по-голямата от степените на принадлежност на този елемент към двете обединявани размити множества.

Сечението на две размити множества над дадено множество се определя по аналогичен начин, като степента на принадлежност

Фигури								
Заоблени	0	0	1	0,1	0,8	0,7	0	0
Разпространени	0	0,2	0,8	0,9	0,6	0,4	0,1	0,5
Красиви	0,6	0,4	0,8	0,6	1	0,7	0,2	1
Плътни	0,9	0,2	0,3	0,7	0,2	1	0	0
Заоблени или плътни	0,9	0,2	1	0,7	0,8	1	0	0
Разпространени и красиви	0	0,2	0,8	0,6	0,6	0,4	0,1	0,5
Некрасиви	0,4	0,6	0,2	0,4	0	0,3	0,8	0
Некрасиви и разпространени	0	0,2	0,2	0,4	0	0,3	0,1	0

Фиг. 7. Таблица, показваща действия между размити множества

на всеки елемент на сечението е по-малката от степените на принадлежност на този елемент към двете първоначални размити множества.

Допълнението на определено размито множество представлява размито множество (над същото изходно множество), в което степените на принадлежност допълват до единица степените на принадлежност към първоначалното размито множество.

В долната половина на таблицата чрез операции над въведените четири размити множества са получени четири нови размити множества.

1.5. МОДЕЛИРАНЕ И РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

Ние възприемаме околния свят, като строим различни модели (описания) на обектите и явленията в света и, разбира се, като използваме построените от други хора модели. Например така се създават различни понятия, чрез които се стремим да класифицираме реалните обекти, да определим характеристики, които са валидни за групи от обекти. Но различни причини пречат на тези наши намерения: субективността, несъвършенствата на възприятията (например платът може да се възприеме като гладка повърхност), фактическата неопределеност на някои характеристики на реалните обекти, поради това че си служим с понятия, които идеализират силно реалността (например облак, пяна), бързите изменения на обектите (например пламък, морска вълна) и др.

Теорията на размитите множества може да се разглежда като математическо средство за по-прецизно моделиране (описване) на обектите и явленията на реалния свят. Тя дава възможност да се отчитат субективните фактори, които водят до неточности при моделирането, и може да се разглежда като специализиран формален език.

Теорията на размитите множества е особено удобна за прилагане в обществените и хуманитарните науки, които са по-малко прецизни и системни и изобилстват със сложни обекти и несъвършени модели. Така например в литературната критика, езикознанието, медицината и в много други области е много по-удобно да си служим с формулировки в размити термини.

Чрез теорията на размитите множества се улесняват връзките между природните и обществените науки. Тя позволява да се разглеждат като размити различни математически понятия: функции, уравнения, алгоритми и т. н.

Същевременно трябва да се отбележи, че самата теория на размитите множества е точна в строгия математически смисъл на думата.

1.6. СВЕТЪТ ЛИ Е НЕТОЧЕН ИЛИ НАШИТЕ ПРЕДСТАВИ ЗА НЕГО?

Мнозина са така вглъбени в математическите теории, физическите и другите природни закони, че ако някой реален обект, явление или процес се отклоняват от тях, говорят за неточности в обекта и, шеговито казано, философски се примиряват с това, че светът не е идеален, че в природата (включително и в създадените от човека предмети) не може да се намери идеално точен квадрат, прав кръгов цилиндър, идеален вакуум и т. н.

Но не е ли странно да разглеждаме нашите закони като точни, а света да обявим за неточен? Нима светът трябва да се съобразява с измислените от нас закони? Не е ли по-естествено да разглеждаме нашите теории като приблизителни, отразяващи свойствата на един опростен и измислен от нас свят?

1.7. КРИТИКА НА ТЕОРИЯТА НА РАЗМИТИТЕ МНОЖЕСТВА

Определянето на степента на принадлежност на даден обект към някое размито множество може да става по различни начини и получаваните резултати като правило ще се различават. Често тази неопределеност е причина някои хора да отричат този начин на работа и да избягват да си служат с него. Но чрез размитите множества ние можем да обхванем, макар и не съвсем точно, повече информация по интересуващия ни въпрос. Нима ще знаем повече за оценяван обект, за който ни е известно решението на журито, взето с вишегласие, без да са ни известни преценките на отделните членове на журито?

Друг повод за критика е, че формално погледнато, може да се мине без теорията на размитите множества, защото създаваните с нея модели могат да бъдат реализирани и чрез по-прости математически средства. Но получените по такъв начин модели обикновено са сложни, непрегледни неудобни за работа.

Вярно е, че теориите не зависят от езика, на който са описани, но използваният от тях език облекчава или затруднява възприемането, развитието и прилагането им. В това отношение математиката изобилства с примери.

1.8. ИСТОРИЧЕСКИ СВЕДЕНИЯ

Понятието размито множество е въведено през 1965 г. от американския специалист в областта на автоматичното управление и теория на системите, професор в гр. Бъркли, Калифорния — Лотфи Заде. Теорията на размитите множества се явява следствие от развитието на n-арната логика, чийто основи са положени от Е. Пост (1921 г.), Д. Лукашевич (1937 г.) и Г. Мойсил (1940 г.) Теорията на размитите множества може да се разглежда и като развитие на работите на М. Блек (1937 г.), свързани с измерване на неопределеността.

През 1968 г. Л. Заде показва начин за дефиниране на някои от основните понятия в теорията на вероятностите в по-общ смисъл, при което понятието размито събитие получава смисъл.

През 1971 г. Е. Чапин и през 1974 г. Д. Гоген изграждат аксиоматичната теория на размитите множества по аналогия на аксиоматичната теория на множествата.

През 1973 г. излиза първата монография, свързана с теорията на размитите множества от А. Кофман — „Въведение в теорията на размитите множества" — [21], а през 1975 г. на К. Негоица и Д. Ралеску „Приложение на размитите множества в системния анализ" — [24].

От 1968г. издателство „Норд Холанд“ започва да издава специализирано международно списание „Размити множества и системи“[25] от 1980 г. във Франция се отпечатва „Бюлетин за размити подмножества и техни приложения“ [18], а от 1981 г. в Китай излиза списанието „Размита математика“.

Публикациите, свързани с теорията на размитите множества и нейни приложения, непрекъснато се увеличават. Както личи от приведената статистическа таблица [29], техният брой до първото тримесечие на 1983 г. е:

години	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
брой публикации	2	6	5	16	26	21	40	63	78	128	171

години	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	общо
брой публикации	157	178	188	237	298	284	512	52	2462

В СССР от 1978 г. ежегодно се провеждат конференции (обикновено в Рига или Перм) по въпроси на размитите множества.

Създадена е европейска работна група по размити множества ELDR, която провежда две-три съвещания годишно. Едно от тях се проведе през 1983 г. в София.

През 1981 г. беше създадена и северноамериканска група за работа с размита информация.

Първият конгрес по проблемите на размитата математика се проведе в 1985 г. в Испания.

В програмата на Осмата национална школа по програмиране (Приморско, 1983) беше включена темата „Размити множества“, като бяха изнесени доклади от С. Орловски и В. Кузмин от СССР, З. Готвалд от ГДР, Е. Санчес от Франция и П. Станчев от НРБ и се проведе дискусия.

ГЛАВА 2

МНОЖЕСТВА, ГРАФИ, ВЕРОЯТНОСТИ

2.1. ВЪВЕДЕНИЕ

Понятието множество е едно от основните понятия в математиката. Неговите свойства се изучават от теорията на множествата, обособила се в края на 19 в. след работите на немския математик Георг Кантор в периода 1871—1883 г. Тази теория е съдействала за развитието на редица клонове на математиката и особено на математическата логика. Много дялове на съвременната математика се изграждат, като се използва теорията на множествата.

Първоначално теорията на множествата е била построена въз основа на интуитивното разбиране на понятието множество и неговите свойства. Но в така разглежданата теория се появили някои противоречия. Например такова противоречие се съдържа в парадокса на Бертран Ръсел, един вариант на който е следният:

„В едно село има само един бръснар. Той бръсне тези и само тези жители, които не се бръснат сами. Кой бръсне бръснаря?"

Да разгледаме множеството от селяни, които се бръснат сами. Принадлежи ли към тях бръснарят? Ако допуснем, че принадлежи, значи той се бръсне сам. Но нали бръснарят бръсне само тези, които не се бръснат сами? Следователно не е възможно той да принадлежи на множеството селяни, които се бръснат сами. Остава друга възможност — бръснарят да не се бръсне сам. Но нали той бръсне тези, които не се бръснат сами? Излиза, че бръснарят нито принадлежи, нито не принадлежи на разглежданото множество.

Този парадокс не е единствен. Съществуват редица подобни парадокси. За да се избягнат аналогични противоречия, дължащи се на интуитивните ни представи за множества, е създадена аксиоматична (формална) теория на множествата. Първата система от аксиоми е публикувана от Ернст Цермело през 1904 г. По-късно тази система е била многократно допълвана и доуточнявана.

При аксиоматичното изграждане на теорията на множествата основните понятия елемент и множество и основната релация принадлежност, не се дефинират. Те играят същата роля както понятията точка и права и релацията инцидентност в аксиоматичната геометрия.

В тази спомагателна глава не се разглежда цялостно теорията на множествата и нейното аксиоматично изграждане, а само се дефинират основни понятия и се излагат основни свойства, които се използват при излагане на теорията на размитите множества и нейни приложения в следващите две глави.

Разглежда се съвсем накратко и понятието граф. Теорията на графите се е зародила в първата половина на 18 в. във връзка с някои развлекателни математически задачи. Първата работа, свързана с теорията на графите, се е появила в 1736 г. с автор Леонард Ойлер, а понятието граф е било въведено от Денеш Кьониг. Развитието на математиката е довело до превръщане на тази теория, още през 19 в. в много съществен инструмент както за вътрешното развитие на математиката, така и за решаване на много практически задачи от икономиката, психологията, биологията и др.

В края на главата са засегнати и някои въпроси от вероятностите, които се използват при дефинирането на понятията размито събитие и размита вероятност. За начало на теорията на вероятностите се счита преписката между Блез Паскал и Пиер Ферма през 1654 г., породена от два въпроса за изход на хазартни игри, зададени на Блез Паскал от известен по това време хазартен играч. Първата значителна работа в тази област е от края на 17 в. и принадлежи на Якоб Бернули.

Теорията на вероятностите подобно на теорията на множествата може да се построи аксиоматично.

В настоящата глава се използват главно дефиниции и означения, взети от книгите [3] и [15] по теория на множествата, от книгата [2] по теория на графите и от книгата [11] по теория на вероятностите. Изброените книги могат да служат за по-задълбочено запознаване на читателя с тези въпроси. Авторите са се стремили да използват предимно терминологията, дадена в математически енциклопедичен речник [6].

2.2. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

2.2.1. ЕЛЕМЕНТ, МНОЖЕСТВО, ПРИНАДЛЕЖНОСТ НА ЕЛЕМЕНТ КЪМ МНОЖЕСТВО

Понятията елемент, множество от елементи и принадлежност на един елемент към дадено множество се приемат за интуитивно ясни.

Множествата ще означаваме с главните латински букви: A, B, C, ..., X, Y, а техни елементи с малките латински букви: a, b, c, ..., x, y.

Със знака $\in$, въведен от Джузепе Пеано, се означава принадлежност на елемент към множество: така $x \in A$ означава „елементът x принадлежи на множеството A" или накратко „x е елемент на A". Знакът $\notin$ (или $\bar{\in}$) се използва, за да се означи непринадлежност: $y \notin A$ означава „y не е елемент на A".

2.2.2. ЗАДАВАНЕ НА МНОЖЕСТВО

Съществуват различни начини за задаване на едно множество. Най-често се използват следните три начина:

— чрез изброяване на елементите на множеството;

— чрез описване на свойствата на елементите на множеството;

— чрез описване на зависимостта, по която се получават елементите на множеството.

Елементите, които образуват дадено множество, се заграждат във фигурни (големи) скоби. Същите скоби се използват и когато се описват свойствата на елементите на множеството или начинът на получаването на тези елементи. В последните два случая първо се написва общото означение на произволен елемент от множеството и след вертикална черта се определят неговите свойства или се описва как може да се получи елементът.

Пример: Множеството A от първите шест нечетни естествени числа може да се задава по един от следните начини:

1. Чрез изброяване: $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

2. Чрез описване на свойствата на елементите му: $A=\{x \mid x \leq 11$ и нечетно$\}$.

3. Чрез описване на зависимостта, по която се получават елементите: $A=\{x_i \mid x_i=2i-1,\ i=1, 2, \ldots, 6\}$.

2.2.3. КРАЙНИ И БЕЗКРАЙНИ МНОЖЕСТВА. ПРАЗНО МНОЖЕСТВО

Определения:

1. Множество, което се състои от краен брой (или нито един) елементи, се нарича **крайно множество.**

2. Множество, което не е крайно, се нарича **безкрайно множество.**

3. Множество, което не съдържа нито един елемент, се нарича **празно множество.** Празното множество се означава със знака $\varnothing$.

Примери:

1. Крайни множества са:

Множеството P на простите числа, ненадминаващи 25.

$$P=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

Футболните отбори, участващи в републиканското първенство.

2. Безкрайни множества са:

Множеството на реалните числа (обикновено се означава с $\mathbb{R}$).

Множеството на положителните реални числа (обикновено се означава с $\mathbb{R}^+$).

Множеството на точките в една равнина (обикновено се означава с $\mathbb{R}^2$).

Множеството на точките в едно тримерно евклидово пространство (обикновено се означава с $\mathbb{R}^3$).

Множеството на естествените числа (обикновено се означава с $\mathbb{N}$).

Множеството на всичките триъгълници, вписани в дадена окръжност.

3. Празно е множеството на реалните корени на уравнението $x^2+3=0$.

2.2.4. ПОДМНОЖЕСТВО. РАВЕНСТВО МЕЖДУ МНОЖЕСТВА

Определения:

1. Ако A и B са две множества и ако всеки елемент на A е елемент на B, то множеството A се нарича **подмножество** на B. Означава се по следния начин: $A \subseteq B$.

2. Ако A и B са две множества и е изпълнено: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, множествата A и B се наричат **равни** и се използва означението $A=B$.

3. Ако множествата A и B не са равни, те се наричат **различни** и се използва означението $A \neq B$.

4. Ако за две множества A и B е изпълнено: $A \subseteq B$ и $A \neq B$, множеството A се нарича **истинско подмножество** на B и се използва означението $A \subset B$.

П р и м е р и:

1. Ако $A=\{x \mid x \geqq 5\}$, $B=\{y \mid y \geqq 7\}$, то $B \subseteq A$.

2. Ако $A=\left\{x \mid \frac{x}{2} - \text{цяло}\right\}$, $B=\{y \mid y - \text{четно}\}$, то $A=B$.

3. За всяко множество A е изпълнено $A \subseteq A$.

2.2.5. ХАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЯ. УНИВЕРСАЛНО МНОЖЕСТВО

Определение. Ако X е произволно множество, **характеристична функция** на множеството A ($A \subseteq X$) върху X се нарича функцията $\chi_A(x)$, която е определена за всяко $x \in X$ и приема стойност единица, ако $x \in A$ и нула — ако $x \notin A$, т. е.

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 1, & \text{ако } x \in A; \\ 0, & \text{ако } x \notin A. \end{cases}$$

Характеристичната функция дава възможност да се определи подмножеството A на множеството X, а именно, на подмножеството A принадлежат тези елементи x на множеството X, за които $\chi_A(x)=1$.

Пример: Нека $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $A=\{x_2, x_3, x_5\}$. Очевидно $A \subsetneq X$. Това ни дава възможност да зададем A чрез харастеристична функция $\chi_A(x)$, която има стойности:

$$\chi_A(x_1)=0,\ \chi_A(x_2)=1,\ \chi_A(x_3)=1,\ \chi_A(x_4)=0,\ \chi_A(x_5)=1.$$

Накратко това ще записваме по следния начин:

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	1	0	1

Чрез различни характеристични функции върху дадено множество X можем да зададем всички негови възможни подмножества. Характеристичната функция, която е тъждествено нула, определя празното множество $\varnothing$, което е подмножество на всяко множество.

При работа с различни множества (особено ако някои от тях имат общи елементи) е удобно да се използва такова множество, на което всички интересуващи ни множества представляват подмножества и тези подмножества да се определят чрез съответни характеристични функции.

Определение. Множество, което съдържа като свое подмножество всяко интересуващо ни множество, се нарича **универсално множество** по отношение на множествата, които ни интересуват. Универсалните множества ще означаваме с U.

Така например множеството на целите числа може да се използва като универсално множество в теорията на числата; множеството на реалните числа може да се използва като универсално множество в аритметиката; множеството на всички химически елементи и съединения — като универсално множество в химията и т. н.

Може да се определи и абсолютно универсално множество, което съдържа като свое подмножество всяко друго множество. Но такова множество е твърде общо и не е необходимо за нашите разглеждания.

2.3. ОПЕРАЦИИ ВЪРХУ МНОЖЕСТВА

Основните операции, които се изпълняват с множества и дават като резултат нови множества, са: определяне елементите на множество P, наричано допълнение на дадено множество A до опреде-

Фиг. 8. Схеми на Вен за допълнение, обединение и сечение на множества

лено универсално множество U; определяне елементите на множество Q, наричано обединение на две дадени множества A и B; определяне елементите на множество L, наричано сечение на две дадени множества A и B.

На фиг. 8 са илюстрирани съответно допълнението, обединението и сечението на множества чрез така наречените схеми на Вен. Универсалното множество е изобразено чрез правоъгълник, множествата, които участват в операциите, са означени с кръгове, а множествата резултати са защриховани.

Определения:

1. **Допълнение** на множеството A до определено универсално множество U се нарича множеството, чийто елементи принадлежат на U и не принадлежат на A. Означава се с $\bar{A}$.

2. **Обединение** на две множества A и B се нарича множеството, съставено от елементите на A и B. Означава се с $A \cup B$.

3. **Сечение** на две множества A и B се нарича множеството от общите елементи на A и B. Означава се с $A \cap B$.

Могат да се разглеждат обединения и сечения не само на две но и на повече множества.

Освен разгледаните операции се използват и други операции между две множества — разлика, дизюнктивна сума и т. н. В тази книга те не се употребяват.

Свойства на трите основни операции:

1. Идемпотентност (множеството не се изменя, ако се обедини или пресече със себе си):

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

2. Комутативност (разменянето на местата на обединяваните или пресичаните множества не променя резултата):

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

3. Асоциативност (редът, в който се образуват две последователни обединения (или сечения) на множества, не променя резултата)

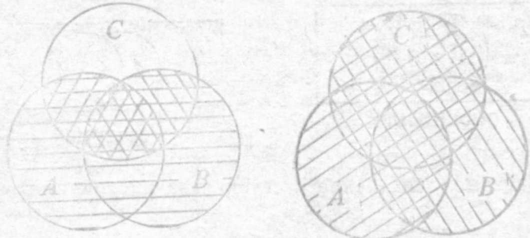
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

—

4. Дистрибутивност:

$$C\cap(A\cup B)=(C\cap A)\cup(C\cap B),$$
$$C\cup(A\cap B)=(C\cup A)\cap(C\cup B).$$

Законите за дистрибутивността са илюстрирани съответно на фиг. 9, а и 9, б, където множествата A, B и C са представени чрез кръгове и с различно защриховане са означени участващите в законите за дистрибутивността обединения или сечения на множества.



$A\cup B$
$C\cap A$
$C\cap B$
$(C\cap A)\cup(C\cap B)$
$=C\cap(A\cup B)$

а

$C\cup A$
$C\cup B$
$(C\cup A)\cap(C\cup B)$
$=C\cup(A\cap B)$

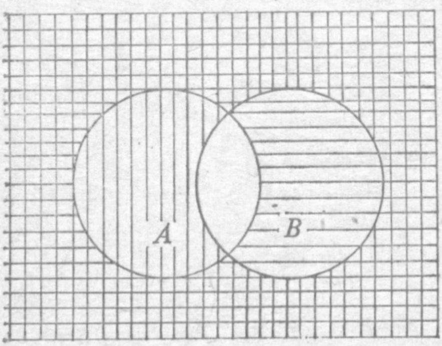
б

Фиг. 9. Илюстрация на дистрибутивността

5. Закони на де Морган:

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},$$
$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

За илюстрация на законите на де Морган може да послужи фиг. 10, на която са изобразени чрез два кръга множествата A и B, множеството $\bar{A}$ е защриховано чрез хоризонтални, а множеството $\bar{B}$ чрез вертикални линии. Сечението $\bar{A}\cap\bar{B}$ се получава с двойно защриховане. Но това е точно областта извън двата кръга, т. е. извън $A\cup B$ или, с други думи, това е точно $\overline{A\cup B}$. Така се стига до първия закон $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$. Същата фигура може да се използва и за илюстрация на втория закон. Тъй като $\bar{A}$ и $\bar{B}$ са защриховани, то $\bar{A}\cup\bar{B}$ също е защриховано (с хоризонтални или вертикални черти). Но това е точно цялата равнина, с изключение на общата част $A\cap B$ на двата кръга, т. е. $\overline{A\cap B}$. И така, $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.



$\bar{A}$ $\bar{B}$ $\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{A\cup B}$

Фиг. 10. Илюстрация на законите на де Морган

6. Поглъщане:

$$A\cup(A\cap B)=A,$$
$$A\cap(A\cup B)=A.$$

7. Двукратно допълнение:

$$\overline{\overline{A}}=A.$$

8. Свойства на характеристичните функции:
Ако $A\subseteq X$ и $B\subseteq X$, то

$$\chi_{\overline{A}}(x)=1-\chi_A(x),$$
$$\chi_{A\cup B}(x)=\max(\chi_A(x),\ \chi_B(x)),$$
$$\chi_{A\cap B}(x)=\min(\chi_A(x),\ \chi_B(x)).$$

Пример: Нека $U=\{$Асен, Борис, Васил, Георги, Димитър, Емил$\}$, A е подмножеството на учениците, притежаващи висок успех, и B — подмножеството на дисциплинираните ученици. Те са зададени с характеристичните си функции, както следва:

$A=$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
1	0	1	0	1	0

$B=$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
1	0	0	0	1	1

Тогава множеството $\bar{A}$ е:

$\bar{A}=$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
1 – 1	1 – 0	1 – 1	1 – 0	1 – 1	1 – 0

или множеството $\bar{A}$ на учениците, непритежаващи висок успех, има вида:

$\bar{A}=$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
0	1	0	1	0	1

Множеството $A \bigcup B$ е:

$A \cup B =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
max (1,1)	max (0,0)	max (1,0)	max (0,0)	max (1,1)	max (0,1)

или множеството на учениците, които или притежават висок успех, или са дисциплинирани, има вида:

$A \cup B =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
1	0	1	0	1	1

Множеството $A \bigcap B$ е:

$A \cap B =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
min (1,1)	min (0,0)	min (1,0)	min (0,0)	min (1,1)	min (0,1)

или множеството на учениците, притежаващи и висок успех, и са дисциплинирани, има вида:

$A \cap B =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил.
1	0	0	0	1	0

2.4. РАЗСТОЯНИЕ

Понятието разстояние е добре известно от нашето ежедневие. Говорим за разстояние между два града (измерено по свързващото ги шосе или по права линия), между Земята и Луната и т. н. Разстоянията измерваме обикновено в метри и техни производни единици.

За подробно запознаване с разстоянието като математическо понятие може да прочетете в [16].

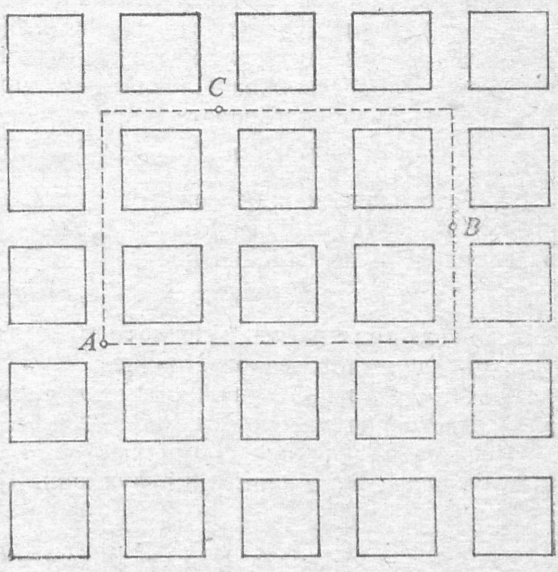
Разстоянието като математическо понятие се определя винаги между два обекта и има следните характеристични свойства:

1. Разстоянието между два различни обекта се задава с положително число, а разстоянието между два съвпадащи (еднакви) обекта — с нула.

2. Разстоянието не зависи от наредбата на обектите. Колкото е разстоянието от Луната до Земята (в даден момент), толкова е и разстоянието от Земята до Луната. Не отговаря на това условие разстоянието, което се има предвид, когато се казва, че разстоянието между хижа „Плевен" и връх Ботев е четири часа (въпреки че туристите се интересуват от това „разстояние"), тъй като времето за връщане от върха ще е по-кратко.

3. Прякото разстояние между два обекта е винаги по-малко или най-много равно на разстоянието между същите обекти, ако пътят преминава през трети обект. Това свойство често се нарича неравенство на триъгълника в съответствие с добре известното свойство, че сборът от дължините на кои да е две страни в триъгълника е по-голям от дължината на третата страна.

Както вече отбелязахме, разстоянието невинаги се измерва по правата линия, свързваща двата обекта. На фиг. 11 е показан план на град, образуван от еднакви квадратни квартали. Ако приемем разстоянието между две кръстовища за единица, то разстоянието между две произволни кръстовища можем да определим като дължината на най-краткия път между тях. Така разстоянието между кръстовищата A и B ще бъде 4 единици, между A и C — 3 единици и между B и C — 3 единици. Лесно може да се провери, че така определеното разстояние има изброените по-горе три свойства.



Фиг. 11. Разстояние между кръстовища

В математиката се разглеждат разстояния между различни математически обекти — точки, функции, крайни и безкрайни множества и др. Често те се употребяват, за да се определи доколко са близки помежду си две числа, две функции или други математически обекти, за да може единият обект да се използва като приближение на другия.

Разстоянието се определя въз основа на вече споменатите три свойства.

Определение. Нека X е множество с произволни елементи и на всеки два елемента x и y от X ($x \in X$, $y \in X$) се съпоставя едно число $d(x, y)$, което се нарича **разстояние** между x и y, ако удовлетворява следните три условия:

1. Условие за неотрицателност:

$d(x, y) \geqq 0$ и $d(x, y)=0$ тогава и само тогава, когато $x=y$.

2. Условие за симетрия:

$$d(x, y)=d(y, x).$$

3. Неравенство на триъгълника:

$$d(x, y) \leqq d(x, z)+d(z, y) \text{ за всяко } z \in X.$$

Възможно е да използваме различни разстояния между елементите на дадено множество. Важно е само въведеното разстояние да удовлетворява условията от даденото определение.

Примери:

1. Да разгледаме множеството $\mathbf{R}^2$, което се състои от точките в равнината, зададени с двете си координати. Нека точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ са от $\mathbf{R}^2$. За разстояние $d(A, B)$ между тези точки можем да използваме дължината на отсечката AB (фиг. 12, а). Това разстояние удовлетворява условията на определението за разстояние. Като използваме питагоровата теорема, получаваме:

$$d(A, B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

2. Разстояние между точките A и B от $\mathbf{R}^2$ (фиг. 12, б) по аналогия с разгледания пример за разстояния между кръстовища, може да се определи по следния начин:

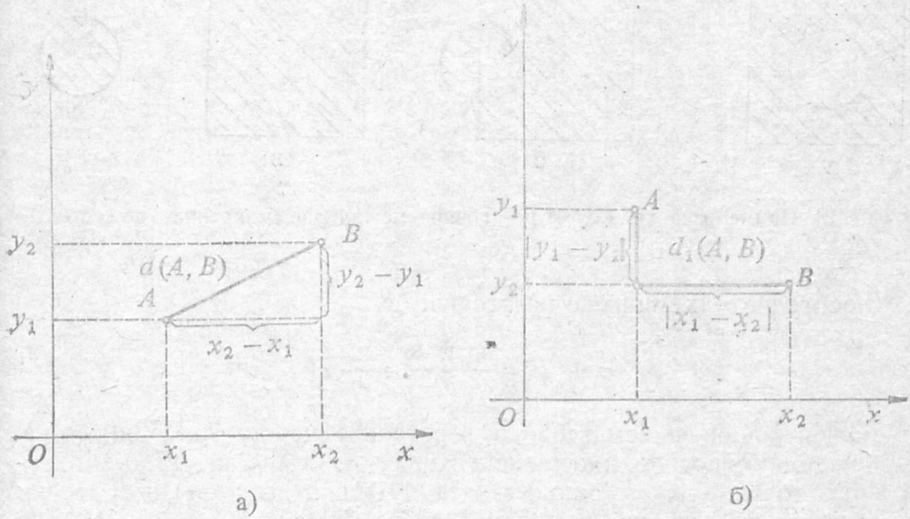
$$d_1(A, B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

Може да се провери, че и числото $d_1(A, B)$ удовлетворява условията от определението за разстояние.

Нека X е крайно множество с n елемента. Ще разгледаме няколко разстояния между подмножества на X.

Нека са дадени две подмножества A и B на X и нека $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$ са характеристичните им функции. Тогава за

$$d(A, B)=\sum_{i=1}^{n}|\chi_A(x_i)-\chi_B(x_i)|$$



Фиг. 12. Разстояния между точки в равнината

може да се провери, че е разстояние в смисъл на дадената дефиниция.

Първите две условия се проверяват непосредствено. Неравенството на триъгълника може да се докаже, че е в сила, като се разгледат всички възможни случаи за положението на A, B и C ($A \subseteq X$, $B \subseteq X$, $C \subseteq X$) и се покаже, че при всяко едно от тях то е в сила.

Това разстояние се нарича **хемингово разстояние** между A и B.

За $\delta(A, B) = \frac{d(A, B)}{n}$ също може да се провери, че е разстояние. Нарича се **относително хемингово разстояние.**

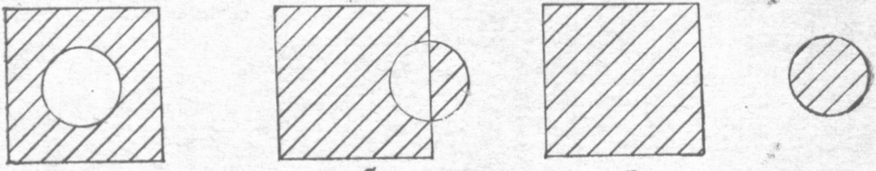
За последните две разстояния са в сила и следните свойства:

1. Хеминговото разстояние удовлетворява условието $d(A, B) \leqq n$.

2. Относителното хемингово разстояние не надминава единица, т. е. $\delta(A, B) \leqq 1$.

Пример: Нека $X = \{$Асен, Борис, Васил, Георги, Димитър, Емил$\}$, A — подмножеството на учениците, притежаващи висок успех, и B — подмножеството на дисциплинираните ученици, са зададени с характеристичните си функции в примера от 2.3. Тогава хеминговото разстояние между A и B се пресмята по следния начин:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{6} |\chi_A(x_i) - \chi_B(x_i)| = 0+0+1+0+0+1=2,$$



а б в

Фиг. 13. Примери за хемингово разстояние между две безкрайни множества

а относителното хемингово разстояние е:

$$\delta(A,\ B)=\frac{d\,(A,\ B)}{n}=\frac{2}{6}\,.$$

Илюстрация на хеминговото разстояние между две множества, съдържащи безкрайно много елементи, се дава на фиг. 13. Хеминговите разстояния между множествата A (точки на кръг) и B (точки на квадрат) представляват защрихованите площи.

2.5. РЕЛАЦИИ, ЧАСТИЧНО НАРЕДЕНИ МНОЖЕСТВА, ФУНКЦИОННА РЕЛАЦИЯ

2.5.1. НАРЕДЕНИ ДВОЙКИ. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Наредена двойка от два произволни обекта x и y се образува като се определи кой обект е първи елемент на двойката и кой — втори елемент. Наредената двойка с пръв елемент x и втори — y се означава с $(x,\ y)$. Две наредени двойки $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ са еднакви само когато $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. Така че наредените двойки $(x,\ y)$ и $(y,\ x)$ са еднакви само ако $x=y$.

Определение. **Декартово произведение** на множества X и Y се нарича множеството на всички наредени двойки $(x,\ y)$, за които $x\in X$ и $y\in Y$. Означава се с $X\times Y$.

Пример: Нека $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$, $Y=\{y_1,\ y_2,\ y_3\}$. Тогава $X\times Y=\{(x_1,\ y_1),\ (x_1,\ y_2),\ (x_1,\ y_3),\ (x_2,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_2,\ y_3),\ (x_3,\ y_1),\ (x_3,\ y_2),\ (x_3,\ y_3),\ (x_4,\ y_1),\ (x_4,\ y_2),\ (x_4,\ y_3)\}$; $Y\times Y=\{(y_1,\ y_1),\ (y_1,\ y_2),\ (y_1,\ y_3),\ (y_2,\ y_1),\ (y_2,\ y_2),\ (y_2,\ y_3),\ (y_3,\ y_1),\ (y_3,\ y_2),\ (y_3,\ y_3)\}$.

Свойство. Ако X е крайно множество с n елемента, а Y е крайно множество с m елемента, то множеството $X\times Y$ е с $n.m$ елемента.

Аналогично може да се определи наредена n-торка и декартово произведение на n множества.

2.5.2. РЕЛАЦИЯ

В едно училище имало 3 осмокласни паралелки — 8 а, 8 б и 8 в, а занятията водели 5 учителки, както следва:

Ангелова — на 8 а, 8 б и 8 в
Балевска — на 8 а и 8 б
Василева — на 8 б и 8 в
Георгиева — на 8 а и 8 в
Димитрова — на 8 а.

Този факт може да се изрази, като се каже, че има две множества:

$X=\{$8 а, 8 б, 8 в$\}$ и
$Y=\{$Ангелова, Балевска, Василева, Георгиева, Димитрова$\}$

и че между тях е установена определена двуместна релация (връзка), която в случая отразява коя учителка на кои класове преподава (или кои са учителките на всеки клас). Елементите на двуместната релация са:

(8 а, Ангелова), (8 а, Балевска), (8 а, Георгиева), (8 а, Димитрова),
(8 б, Ангелова), (8 б, Балевска), (8 б, Василева),
(8 в, Ангелова), (8 в, Василева), (8 в, Георгиева).

Вижда се, че елементите на двуместната релация образуват подмножество на декартовото произведение на двете множества. Това подмножество може да бъде зададено чрез изброяване на елементите му (както в разглеждания пример) или по някои от другите възможни начини за задаване на множества: Например, ако $X=\{x|x=2i-1,\ i=1, 2, 3,\ldots\}$ и $Y=\{y|y=2i,\ i=1, 2, 3,\ldots\}$, то една двуместна релация между тях е $R=\{r|r=(x, y),\ x<y\}$ или, изразено по друг начин, тя се състои от безброй многото двойки:

$$
\begin{array}{l}
(1,2), (1,4), (1,6), (1,8),\ldots \\
(3,4), (3,6), (3,8),\ldots \\
(5,6), (5,8),\ldots \\
\ldots
\end{array}
$$

Определение. Нека X и Y са две произволни множества и $X\times Y$ — тяхното декартово произведение. Едно множество R се нарича **двуместна релация** между множествата X и Y или **двуместна релация в декартовото произведение** на X и Y, ако $R\subseteq X\times Y$, т. е., ако R е подмножество на това произведение.

В частния случай, когато двете множества съвпадат, т. е., ако $R\subseteq X\times X$, се казва, че R е двуместна релация в X. Например, ако

$X=\{x|x$ — естествено число$\}$, то релацията $R=\{r|r=(x_1, x_2), x_1 \in X, x_2 \in X, x_1=x_2+1\}$, свързваща всяко естествено число със следващото го, е двуместна релация в множеството на естествените числа.

Една релация между X и Y се нарича още **изображение, съпоставяне** на множеството X в Y. Елементите $x \in X$ се наричат **оригинали**, а съответните им чрез релацията елементи $y \in Y$ — **образи.** Релация може да се записва и по следните начини: $R: X \to Y$; $X \xrightarrow{R} Y$.

Думата „двуместна" се употребява, за да се подчертае, че дадена релация се отнася за две, образуващи наредена двойка, множества. Могат да се разглеждат и релации между повече на брой множества, но ние няма да си служим с такива релации и по-нататък за краткост ще пропускаме думата „двуместна".

Ако множествата X и Y са крайни, съответно с n и m елемента, релация R между тях може да се зададе с характеристичната функция на множеството R, т. е. с таблицата

$$\|r_{ij}\|, \; i=1, 2, \ldots, n, \; j=1, 2, \ldots, m,$$

където
$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{ако } (x_i, y_j) \in R,\\ 0, & \text{ако } (x_i, y_j) \notin R,\end{cases}$$

за всяко $i=1, 2, \ldots, n, \; j=1, 2, \ldots, m$.

При такъв начин на задаване на релации ще използваме посоченото в следващия пример означение чрез таблица.

П р и м е р: Нека $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$. Една възможна релация между X и Y е релацията:

$$R=\{(x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_1), (x_4, y_2)\}.$$

Тя може да се зададе и по следния начин:

R \ Y / X	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0	1
x_2	1	0	0
x_3	0	1	1
x_4	1	1	0

2.5.3. ПОДРЕЛАЦИЯ

Определение. Релацията R между X и Y се нарича **подрелация** на релацията S между X и Y, ако за множествата R и S е в сила $R \subseteq S$.

Ако R и S са релации между крайните множества X и Y, съответно с n и m елемента, то от даденото определение непосредствено следва следното свойство:

Свойство. Нека R и S са релации между X и Y и са зададени с таблиците $\|r_{ij}\|$ и $\|s_{ij}\|$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$. Тогава, ако $R \subseteq S$ то $r_{ij} \leq s_{ij}$ за всяко $i=1, 2, \ldots, n$ и $j=1, 2, \ldots, m$.

2.5.4. ОПЕРАЦИИ ВЪРХУ РЕЛАЦИИ

Тъй като релацията между две множества е множество, за нея са в сила операциите върху множества. При това при всички релации между множества X и Y като универсално множество се използва декартовото им произведение $X \times Y$.

Определения:

1. **Допълнение** на релацията R между X и Y се нарича допълнението на множеството R в декартовото произведение $X \times Y$. Означава се с $\overline{R}$.

2. **Обединение** на релациите R и S между X и Y се нарича обединението на множествата R и S. Означава се с $R \cup S$.

3. **Сечение** на релациите R и S между X и Y се нарича сечението на множествата R и S. Означава се с $R \cap S$.

4. Релацията R^{-1} между Y и X се нарича **обратна релация** на релацията R между X и Y, ако за всяко $(x, y)((x, y) \in R, x \in X, y \in Y)$ е в сила $(y, x) \in R^{-1}$.

Свойства:

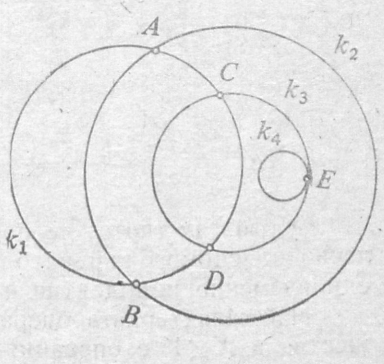
1. Ако R и S са релации между X и Y, то $\overline{R}$, $R \cup S$, $R \cap S$ са също релации между X и Y.

2. Ако R и S са релации между крайните множества X и Y съответно с n и m елемента и са зададени с таблиците $\|r_{ij}\|$, $\|s_{ij}\|$ $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$, то елементите в таблицата на:

— допълнението $\overline{R}$ в $X \times Y$ са $1-r_{ij}$;

— обединението $R \cup S$ в $X \times Y$ са $\max(r_{ij}, s_{ij})$;

— сечението $R \cap S$ в $X \times Y$ са $\min(r_{ij}, s_{ij})$.



Фиг. 14. Пример на релации между окръжности и точки

Пример: Нека X е множество от четири окръжности, а Y — множество от пет точки (фиг. 14) и нека R в $X \times Y$ е релация, определяща инцидентност между окръжностите и точките, а S в $X \times Y$ — релация, определяща външните точки по отношение на всяка окръжност. Зададени чрез таблица, тези релации имат вида:

R \ Y, X	A	B	C	D	E
k_1	1	1	1	1	0
k_2	1	1	0	0	0
k_3	0	0	1	1	1
k_4	0	0	0	0	1

S \ Y, X	A	B	C	D	E
k_1	0	0	0	0	1
k_2	0	0	0	0	0
k_3	1	1	0	0	0
k_4	1	1	1	1	0

Тогава $\overline{R}$, $R \cup S$, $R \cap S$ ще се задават съответно с таблиците:

$\overline{R}$ \ Y, X	A	B	C	D	E
k_1	0	0	0	0	1
k_2	0	0	1	1	1
k_3	1	1	0	0	0
k_4	1	1	1	1	0

$R \cup S$ \ Y, X	A	B	C	D	E
k_1	1	1	1	1	1
k_2	1	1	0	0	0
k_3	1	1	1	1	1
k_4	1	1	1	1	1

$R \cap S$ \ Y, X	A	B	C	D	E
k_1	0	0	0	0	0
k_2	0	0	0	0	0
k_3	0	0	0	0	0
k_4	0	0	0	0	0

Обстоятелството, че последната таблица съдържа само нули, е лесно обяснимо, тъй като релацията $R \cap S$ означава, че точката е едновременно инцидентна и външна за окръжността.

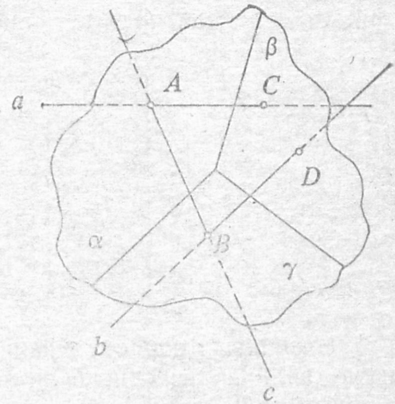
Най-характерната операция за релациите R и S между две множества в $X \times Y$ е операцията композиция $(R \circ S)$. За простота на изложението ще я определим само в случая на крайни множества.

По същество композицията е последователно прилагане на две релации. Нека например са дадени три равнини и три пробождащи ги прави в четири точки (фиг. 15). Така са определени три множества:

$X=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — множество от равнини;

$Y=\{a, b, c\}$ — множество от прави;

$Z=\{A, B, C, D\}$ — множество от точки.



Фиг. 15. Илюстрация на композиция на две релации

Ще разгледаме две релации R и S. Първата от тях определя пробождането на равнини с прави, т. е. това е релация в множеството $X\times Y$, която се определя с таблицата

R \ Y, X	a	b	c
α	1	0	1
β	1	1	0
γ	0	1	1

Втората релация S определя инцидентност на точки и прави, т. е. това е релация в множеството $Y\times Z$. Тя се определя с таблицата:

S \ Z, Y	A	B	C	D
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	1	1	0	0

Композицията на релациите R и S показва връзката между равнините и точките. В случая тази връзка ще определя за всяка равнина кои са точките, които лежат на пробождащите я прави. От фиг. 15 не е трудно да съобразим, че композицията на двете релации се определя чрез таблицата:

$R \circ S$ $X \backslash Z$	A	B	C	D
α	1	1	1	0
β	1	1	1	1
γ	1	1	0	1

Възниква въпросът, как да пресметнем елементите на последната таблица въз основа на таблиците, чрез които се определят релациите R и S.

За да установим дали дадена равнина, например α, е свързана чрез пробождаща я права с определена точка, например B, трябва да проверим за всяка права, пробождаща равнината, дали е инцидентна с интересуващата ни точка. В случая който се вижда от първия ред на таблицата R, равнината α се пробожда от правите a и c. От втория стълб на таблицата S се вижда, че правата a не е инцидентна с точката B, но правата c е инцидентна с B. Това е достатъчно, за да заключим, че между равнинита α и точката B има връзка, което е отразено с единица във втория стълб на първия ред на таблицата $R \circ S$. Този резултат формално можем да получим по следния начин: Съпоставяме първия ред на таблицата R с втория стълб на таблицата S (броят на стълбовете на таблицата R винаги е равен на броя на редовете на таблицата S, защото се определя от броя на елементите на едно и също множество Y) и намираме минимума на всяка двойка:

$$\min(1,\ 0)=0,\quad \min(0,\ 1)=0,\quad \min(1,\ 1)=1.$$

Минимумът е единица само ако и двата елемента са единици, т. е. когато съществува тройната връзка „равнина, права, точка". Ако поне един от минимумите е единица, то в таблицата $R \circ S$ записваме 1, а в противен случай — 0. Това може да се изрази чрез намиране на максимума от трите минимума. В случая $\max(0,\ 0,\ 1)=1$. По аналогичен начин намираме останалите елементи на таблицата $R \circ S$. Например, четвъртият елемент на втория ред се получава по формулата:

$$\max[\min(1,\ 0),\ \min(1,\ 1),\quad \min(0,\ 0)]=\max(0,\ 1,\ 0)=1,$$

а третият елемент от третия стълб — по формулата:

$$\max[\min(0,\ 1),\ \min(1,\ 0),\quad \min(1,\ 0)]=\max(0,\ 0,\ 0)=0.$$

Определение. Нека X, Y, Z са крайни множества съответно с n, m и l елементи. Нека релациите R в $X\times Y$ и S в $Y\times Z$ са зададени съответно с таблиците $\|r_{ij}\|$, $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$; $\|s_{jk}\|$, $j=1, 2, \ldots, m$, $k=1, 2, \ldots, l$. Тогава под **композиция** на релациите R и S се разбира релацията T в $X\times Z$, чиято таблица $\|t_{ik}\|$, $i=1, 2, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots, l$ има следните елементи: $t_{ik}=\max\limits_{j=1, 2, \ldots, m}[\min(r_{ij}, s_{jk})]$ $i=1, 2, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots, l$.

2.5.5. РЕЛАЦИЯ В X

Както бе казано, релация в X се нарича всяка релация в $X\times X$.

Определения:

1. Релация R в X се нарича **рефлективна**, ако за всяко x $(x\in X)$ е изпълнено $(x, x)\in R$.

Ако X е крайно множество, таблицата която задава R, има единици по главния диагонал.

2. Релацията R в X се нарича **ирефлективна**, ако за никое x $(x\in X)$ не е изпълнено $(x, x)\in R$.

Ако X е крайно множество, таблицата, която задава R, има нули по главния диагонал.

3. Релацията R в X се нарича **симетрична**, ако за всяко x и y $(x\in X, y\in X)$, за които $x\neq y$ и $(x, y)\in R$, е в сила $(y, x)\in R$.

4. Релацията R в X се нарича **антисиметрична**, ако за всяко x и y $(x\in X, y\in X)$, за които $x\neq y$ и $(x, y)\in R$, е в сила $(y, x)\notin R$.

За всяко x, y $(x\in X, y\in X)$, ако $(x, y)\in R$ и $(y, x)\in R$, е в сила $x=y$.

5. Релацията R в X се нарича **транзитивна**, ако за всяко x, y, z $(x\in X, y\in X, z\in X)$ е изпълнено: щом $(x, y)\in R$ и $(y, z)\in R$, то $(x, z)\in R$.

Ако R в X е транзитивна релация, то $R^2\subseteq R$ $(R^2=R\circ R)$. Това свойство служи за проверка дали дадена релация е транзитивна.

Пример: Нека $X=\{$София, Варна, Бургас, Търговище$\}$, а R в X е релацията, която показва дали има преки самолетни връзки между градовете, и нека R е зададена с таблицата:

R \ X / X	София	Варна	Бургас	Търговище
София	0	1	1	1
Варна	1	0	0	0
Бургас	1	0	0	0
Търговище	1	0	0	0

Тази релация е: ирефлективна (таблицата, която я задава, има нули по главния диагонал); симетрична (за всяко $x, y \in X$, $x \neq y$ е изпълнено, щом $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$); не е транзитивна (може да се пресметне R^2 и да се провери, че $R^2 \subseteq R$ не е в сила).

2.5.6. ЧАСТИЧНА НАРЕДБА. ЧАСТИЧНО НАРЕДЕНО МНОЖЕСТВО

Нека **N** е множеството от естествените числа и да разгледаме релацията делимост в **N**, която ще означаваме с „|", т. е. $n|m$ е в сила тогава и само тогава, когато n дели m. Тази релация е рефлективна, защото за всяко $x \in \mathbf{N}$ е изпълнено $x|x$. Тя е антисиметрична, защото от $n|m$ и $m|n$ следва $n=m$. Тази релация е и транзитивна, тъй като от $n|m$ и $m|p$ следва $n|p$.

Определение. Една релация R в X се нарича **частична наредба** в X, ако е рефлективна, транзитивна и антисиметрична.

Ако релацията R в X е частична наредба, то вместо означението $(x, y) \in R$ се използва по-кратко $x \leqq y$. Множеството X, в което е дефинирана частична наредба, се нарича **частично наредено.**

Определения: Нека X е частично наредено множество. Казва се, че x **предхожда** y за всяко x, y $(x \in X, y \in X)$ и се означава $x \prec y$, ако $x \leqq y$ и $x \neq y$. Един елемент x_0 $(x_0 \in X)$ се нарича **максимален** и се означава $x_0 = \max\limits_{x \in X} x$, ако не съществува x $(x \in X)$ такова, че $x_0 \prec x$. Аналогично, един елемент $y_0 (y_0 \in X)$ се нарича **минимален** $y_0 = \min\limits_{y \in X} y$, ако не съществува y $(y \in X)$ такова, че $y \prec y_0$.

Елементът x_0 $(x_0 \in X)$ се нарича **най-голям**, ако е изпълнено условието $x \leqq x_0$ за всяко x $(x \in X)$. Аналогично y_0 $(y_0 \in X)$ се нарича **най-малък**, ако е изпълнено условието $y_0 \leqq y$ за всяко y $(y \in X)$.

Свойство. В частично наредено множество X съществува най-много един най-голям елемент и (ако съществува) той е максимален.

Ще определим и понятието горна и долна граница на едно множество.

Определения: Нека X е частично наредено множество и $A \subseteq X$. Елементът x_0 $(x_0 \in X)$ се нарича **горна граница** на A, ако за всяко x $(x \in A)$ е в сила $x \leqq x_0$. Елементът y_0 $(y_0 \in X)$ се нарича **долна граница** на A, ако за всяко y $(y \in A)$ е в сила $y \geqq y_0$. Най-малкият елемент (ако съществува) на множеството на всички горни граници на A се нарича **точна горна граница на** A и се означава с $\sup A$. Най-големият елемент (ако съществува) на множеството на всички долни граници на A се нарича **точна долна граница** на A и се означава $\inf A$.

Пример: Нека **N** е множеството на естествените числа, дадена е релацията делимост в **N** и нека $A = \{4, 6\}$.

Числата 1, 2 са долни граници на A, защото всяко от тях е делител на числата от A. Числата 12, 24, 36, . . . са горни граници, защото всяко от числата в A дели тези числа. И така, множеството от долни граници на A е $\{1, 2\}$ и следователно $\inf A = 2$, а множеството от горни граници на A е $\{12, 24, 36, \ldots\}$ и следователно $\sup A = 12$.

2.5.7. ФУНКЦИОННА РЕЛАЦИЯ

От училищния курс по алгебра читателят се е запознал с понятието **функция**. Това понятие е едно от основните в математиката и по-подробно за него може да се прочете например в серията статии [10].

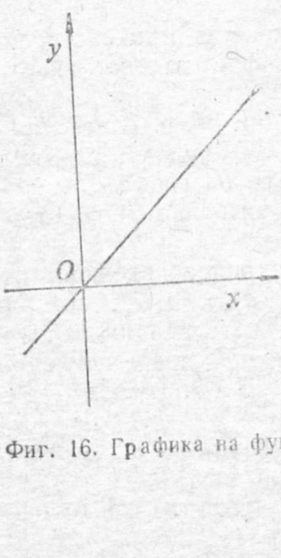
Определение. Една релация f в $X \times Y$ се нарича **функционна релация (функционна зависимост, функция, еднозначно съпоставяне, еднозначно изображение)**, когато всеки елемент x $(x \in X)$ е в релация с най-много един елемент y $(y \in Y)$. Множеството X се нарича **дефиниционна област**, а Y — **множество на допустимите стойности**.

Най-често използваните начини за записване на функционните релации са: $f: X \to Y$; $X \xrightarrow{f} Y$; $y = f(x)$ за всяко x $(x \in X)$.

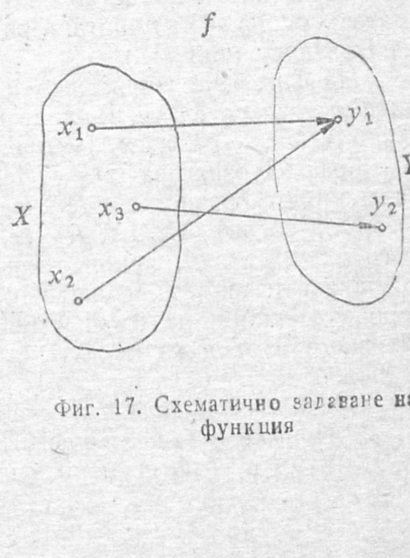
Функционната зависимост може да се задава по различни начини. Най-употребяваните са следните:

1. Таблично. Таблицата в 1.8. показва зависимостта между годините и брой на публикациите в областта на размитите множества през тях.

2. Аналитично. Нека $X = Y$ е множеството на естествените чис-



Фиг. 16. Графика на функцията $y = x$



Фиг. 17. Схематично задаване на функция

ла **N**. Аналитично зададена функционна зависимост е например: $y=2x$, $x \in \mathbf{N}$.

3. Графично. Нека $X=Y$ е множеството на реалните числа **R**. Функционната зависимост $y=x$ е зададена графично на фиг. 16.

4. Схематично. На фиг. 17 са зададени схематично две множества: $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y=\{y_1, y_2\}$, и със стрелка е означено едно еднозначно съпоставяне $f: X \rightarrow Y$.

2.6. ГРАФИ

Най-общо казано, графите представляват геометрични схеми, с помощта на които се изобразяват връзките между елементите в едно множество.

В настоящото изложение ще се спрем само на някои основни понятия. Допълнителни познания могат да се получат от [5].

Граф представлява релация, зададена в дадено множество X. Елементите на множеството X се наричат **върхове на графа** и графично се изобразяват с точки. Ако дадена двойка (x_1, x_2) $(x_1 \in X, x_2 \in X)$ принадлежи на релацията, задаваща графа, тя се нарича **дъга** и графично се означава с линия между x_1 и x_2, снабдена със стрелка; x_1 се нарича **начало**, а x_2 — **край** на дъгата. Ако двойките (x_1, x_2) и (x_2, x_1) $(x_1 \in X, x_2 \in X)$ едновременно принадлежат на релацията, задаваща графа, те се наричат **ребра** и обикновено графично се задават с линия между x_1 и x_2.

Граф, съдържащ само ребра, се нарича **неориентиран**, а граф, съдържащ само дъги — **ориентиран**.

Всяка карта представлява неориентиран граф с върхове селищата и ребра — пътищата. Пример за такъв граф е дадената карта на България (фиг. 18).

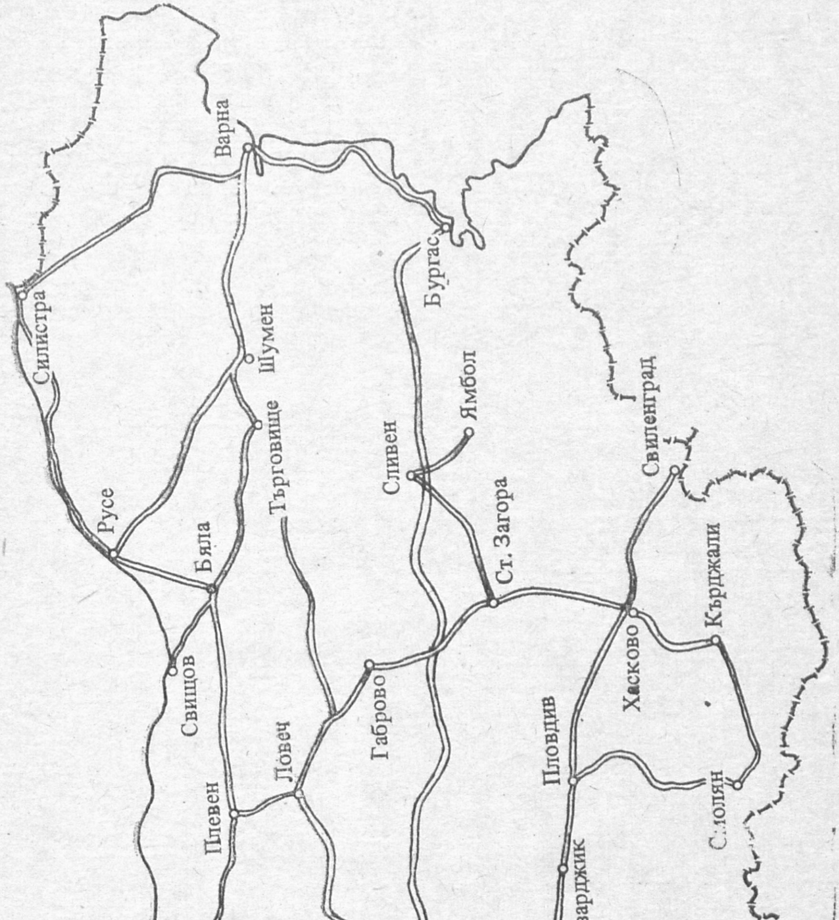
На фиг. 19, а е показано изображение на един граф. В него точките x_1, x_2, x_3, x_4 са върхове на графа, а (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_4) са дъги на графа.

Граф се означава $G=(X, R)$, където X е произволно множество, различно от празното, а R е релация в X.

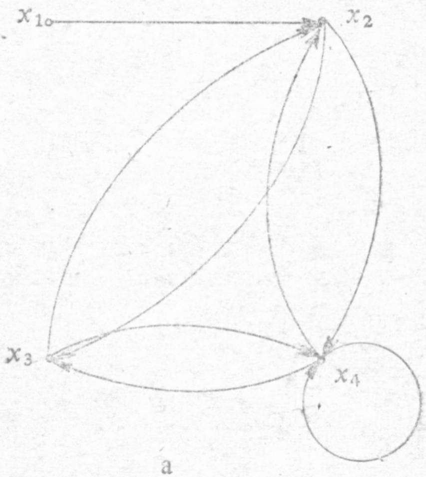
Път в граф $G=(X, R)$ се нарича такава последователност от дъги $u_1, u_2, \ldots, u_k$, за която краят на всяка дъга u_i, $i=1, 2, \ldots, k-1$ съвпада с началото на следващата. Броят на дъгите в един път се нарича **дължина на пътя**. Един път в графа от примера е последователността от дъги (x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_4), (x_4, x_3). Този път е с дължина 4.

Примка се нарича път с дължина 1, образуван от дъга от вида (x, x). Примка в графа на фиг. 19, а има при върха x_4.

Контур в граф се нарича път с краен брой дъги, за който на-



Фиг. 18. Схема на шосетата в България

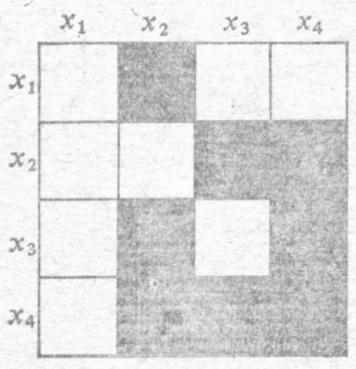


а

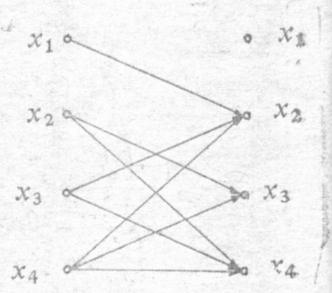
чалото на първата дъга съвпада с края на последната. Контур в графа от примера е пътят (x_2, x_4), (x_4, x_4), (x_4, x_3), (x_3, x_2).

Ребра в графа на фиг. 19, а са (x_2, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_4).

Верига в граф се нарича път от ребра. Една верига в графа от примера е (x_2, x_4), (x_4, x_3).



б



в

Фиг. 19. Пример на различни графични представяния на един граф

Цикъл в граф се нарича верига, която започва и завършва в един и същ връх на графа. Цикъл в графа от примера е веригата (x_3, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_3).

Освен графично графът може да се задава и чрез таблицата, задаваща релацията. За примера тя е:

R \ X / X	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	0
x_2	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1
x_4	0	1	1	1

На фиг. 19, б е показан един друг начин за задаване на граф. Той съответства на таблицата, която задава релацията, определяща графа, при което с черно е попълнено съответното квадратче на таблицата, ако стойността в нея е 1, а с бяло, ако е 0.

На фиг. 19, в е показан друг начин за задаване на граф, при който се изобразяват началата и краищата на дъгите на графа.

2.7. ВЕРОЯТНОСТИ

В тази част съвсем накратко ще разгледаме само някои понятия от теорията на вероятностите, доколкото те ще са необходими за по-нататъшното изложение. Един добър начин за навлизане в теорията на вероятностите е запознаване със серията беседи [7].

Да разгледаме следния опит — хвърляне на една монета. От това действие могат да се получат два резултата — „да се падне ези" или „да се падне тура". При това никой от двата възможни изхода няма предимство пред другия. Прието е такива изходи да се наричат **равновъзможни.**

Определения. **Елементарно събитие** се нарича всеки възможен изход от един опит. Съвкупността Ω от елементарни събития, съответстващи на един опит, се нарича **пространство на елементарните събития. Събитие** се нарича всяко подмножество A на пространството на елементарните събития Ω.

За разглеждания пример $\Omega=\{$„да се падне ези", „да се падне тура"$\}$, а събития са: A — „да се падне ези" и B — „да се падне тура".

Всички изходи, при които дадено събитие настъпва, се наричат **благоприятни** за това събитие. Ако от всички n равновъзможни изхода m са благоприятни за събитието A, то **вероятност на събитието** A се нарича отношението $\frac{n}{m}$ и се означава с $P(A)$.

За горния пример вероятността на събитието A е $P(A)=\frac{1}{2}$, тъй като има един изход, при който събитието „да се падне ези“ настъпва, а всичките изходи са два.

Две събития A и B се наричат **несъвместими**, ако нямат изходи, които съвпадат, т. е. нямат изходи, които са благоприятни и за A и за B.

Под **сума на две събития** A и B се разбира събитие, което се състои както от изходите, съответстващи на A, така и от изходите съответстващи на B. Означава се с $A \cup B$.

Под **произведение на две събития** A и B се разбира събитие, състоящо се от тези и само от тези изходи, които съответстват както на A, така и на B. Означава се с $A \cap B$.

Пример: Хвърляме два зара. Нека събитието A е „сборът от точките на двата зара да е 7“. Всички възникнали случаи при хвърляне на два зара са 36, т. е. Ω съдържа 36 събития. Да ги означим с $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{21}, A_{22}, A_{23}, \ldots, A_{61}, A_{62}, A_{63}, \ldots, A_{66}$, където A_{ij} означава събитието да се падне i точки на първия зар и j точки на втория. Събитието A, което ни интересува, ще бъде $A=\{A_{16}, A_{25}, A_{34}, A_{45}, A_{52}, A_{61}\}$. Тъй като A съдържа 6 елементарни събития, броят на благоприятните изходи е 6. Следователно $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Освен по този начин понятието вероятност се дефинира и аксиоматично.

2.8. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

1. Ако A, B, C, D са произволни множества, да се покаже, че:

а) $A \cap B \subseteq A \cup B$;

б) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.

2. Да се докаже, че дефинираните в 2.4. разстояния удовлетворяват трите характерни свойства за всяко разстояние.

3. Да се начертае единичният кръг при разстояние $r(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, ($(x_1, y_1)$ и (x_2, y_2) са координатите на точките A и B), т. е. съвкупността от точките, които са на разстояние 1 от точката (0, 0).

4. Да се докаже, че ако една релация R между X и Y е симетрична и транзитивна, тя е рефлективна.

5. Да се пресметне броят на максималните и минималните елементи на множеството на естествените числа, частично наредено спрямо операцията делимост (вж. примера от 2.5.6.)

6. Да се докаже, че в частично наредено множество X съществува най-много един най-малък елемент и ако съществува, той е минимален.

7. Да се пресметне $R \cup R$ на релацията R в X, зададена с таблицата:

$R \backslash X$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	1	0	1	1
x_2	1	0	1	1	1	0	1
x_3	1	1	0	1	0	1	1
x_4	0	1	0	0	0	0	1
x_5	1	0	0	1	1	0	0
x_6	0	1	1	1	1	0	0
x_7	0	0	0	0	1	1	1

8. В една урна има 10 бели и 20 черни топки. Да се пресметне вероятността да се извади от урната бяла топка.

ГЛАВА 3

РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

В тази глава се разглежда теорията на размитите множества, като дефинициите, които се използват, са взети главно от [13], [21], [22], а за размити събития от [20].

За начално запознаване с размитите множества е подходяща статията [12].

3.1. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

3.1.1. РАЗМИТО МНОЖЕСТВО. ФУНКЦИЯ, МНОЖЕСТВО И СТЕПЕН НА ПРИНАДЛЕЖНОСТ, БАЗОВО МНОЖЕСТВО

Точното дефиниране на понятието размито множество може да се извърши по няколко начина. Ние ще започнем с най-естествения от тях, а именно чрез въвеждане на понятието функция на принадлежност по аналогия на понятието характеристична функция на обикновено множество. Чрез нея ще дефинираме останалите понятия в теорията на размитите множества.

Нека X е множество от обекти и $A \subseteq X$. Да си представим, че характеристичната функция $\mu_A(x)$ на множеството A може да приема произволни стойности в интервала $[0, 1]$. Тогава за елементите x принадлежащи на множеството X, са възможни следните случаи:

а) $x \notin A$ $(\mu_A(x)=0)$;

б) x „принадлежи малко" на A ($\mu_A(x) \in [0, 1]$ и е близко до 0);

в) x „принадлежи доста" на A ($\mu_A(x) \in [0, 1]$ и не е близко нито до нула, нито до единица);

г) x „принадлежи твърде много" на A ($\mu_A(x) \in [0, 1]$ и е близко до 1);

д) x „изцяло принадлежи" на A $(\mu_A(x)=1)$.

Нека X е крайно множество с елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогава можем да дефинираме подмножеството A чрез функцията $\mu_A(x)$ по следния начин:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_1 \diagup \mu_A(x_1) & x_2 \diagup \mu_A(x_2) & \ldots & x_n \diagup \mu_A(x_n) \\ \hline \end{array}$$

Множеството A, представено по този начин, се нарича **размито множество A над множеството X.**

В настоящото изложение размитите множества ще означаваме предимно с буквите $A, B, C, \ldots$, а обикновените множества — с X, Y, Z.

Сега ще разгледаме определението за размито множество, дадено в [1].

Определение. Нека X е множество от елементи, означени с x. **Размито множество A над X** се нарича съвкупността от всички двойки $(x, \mu_A(x))$, за които $x \in X$, а $\mu_A(x)$ е функция, дефинирана върху елементите на X и приемаща стойности в интервала $[0, 1]$. Функцията се нарича **функция на принадлежност,** а множеството от стойности, които тя приема — **множество на принадлежност.** Множеството X се нарича **базово множество.** За $x \in X$, числото $\mu_A(x)$, се нарича **степен на принадлежност** на x към A.

Пример: Нека X е крайно множество с 5 елемента: $X=\{1;\ 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001\}$. Размитото множество A над X-„малки числа" може да се дефинира така:

$A =$

1	0,1	0,01	0,001	0,0001
0,2	0,4	0,6	0,8	1

т. е. колкото числото е по-малко, толкова по-висока е степента му на принадлежност към размитото множество „малки числа". В този пример множеството на принадлежност е: $\{0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,8;\ 1\}$.

В [8] Л. Заде обобщава понятието размито множество, като разглежда размити множества, чиято функция на принадлежност е размито множество над интервала $[0, 1]$, и ги нарича **размити множества от тип 2**, а обикновените размити множества, които вече определихме, **от тип 1**. Пример на размито множество от тип 2 се разглежда в 4.2. Продължавайки това обобщение, Заде дава следното определение:

Определение. **Размито множество от тип n, $n=1, 2, 3, \ldots$ е размито множество, чиято функция на принадлежност е размито множество от тип $n-1$. Функцията на принадлежност на размито множество от тип 1 взема стойности в интервала $[0,1]$.**

3.1.2. ПРАЗНО, УНИВЕРСАЛНО, НОРМАЛНО И СУБНОРМАЛНО РАЗМИТО МНОЖЕСТВО. НОСИТЕЛ НА РАЗМИТО МНОЖЕСТВО

Някои от основните понятия, свързани с размитите множества са

Определения:

1. Размитото множество A над X се нарича **празно**, ако $\mu_A(x) = 0$ за всяко $x \in X$. Означава се с $\varnothing$.

2. Размитото множество A над X се нарича **универсално**, ако $\mu_A(x) = 1$ за всяко $x \in X$. Означава се с U.

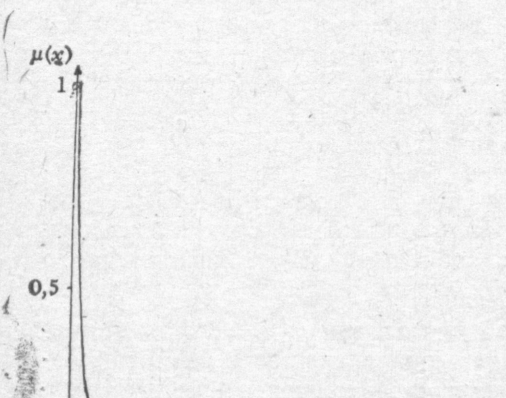
3. **Носител** на размитото множество A над X се нарича обикновеното множество $\{x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}$. Означава се със $\operatorname{supp} A$.

4. Размитото множество A над X се нарича **нормално,** ако съществува $x\,(x \in X)$, за което $\mu_A(x) = 1$. Ако едно размито множество A над X не е нормално, то се нарича **субнормално**.

Примери: 1. Нека X е познатото ни от примера в 1.3. множество $X = \{$Асен, Борис, Васил, Георги, Димитър, Емил$\}$. Тогава размитото множество A — „притежание на чувство за хумор" на учениците от групата, може да се запише по следния начин:

$A =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
0,9	0,2	0	0,5	1	0,7



Фиг. 20. Пример на размитото множество „непознаване на света"

В A степен на принадлежност 1 има Димитър, 0,9 — Асен, 0,7 — Емил, 0,5 — Георги, 0,2 — Борис и 0 — Васил. В този пример A е нормално размито множество с носител $\operatorname{supp} A = \{$Асен, Борис, Георги, Димитър, Емил$\}$. Множеството на принадлежност е $\{0;\ 0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9;\ 1\}$.

2. Нека X е множеството от реални числа в интервала $[1, 100]$. Определяме размитото множество A над X — „непознаване на света" във възрастовия интервал $[1, 100]$ с функция на принадлежност функцията, изобразена на фиг. 20. Аналитично $\mu_A(x)$ има вида

$$\mu_A(x)=\frac{1}{x} \text{ за всяко } x\ (x\in X).$$

В разгледания пример считаме, че човек не познава света със степен на принадлежност 1, ако е на 1 година, с 0,5, ако е на 2 години, с 0,33, ако е на 3 години, и т. н. В примера A е нормално размито множество и $\operatorname{supp} A=[1, 100]$.

3.1.3. РАЗМИТО ПОДМНОЖЕСТВО. РАВЕНСТВО НА РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

Определения:

1. Нека A, B са две размити множества над X. Размитото множество A над X се нарича **подмножество** на размитото множество B над X, ако $\mu_A(x)\leqq\mu_B(x)$ за всяко $x\in X$. Означава се $A\subseteq B$.

2. Размитите множества A над X и B над X се наричат **равни**, ако $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ за всяко $x\in X$. Означава се $A=B$.

3. Ако две размити множества A над X и B над X не са равни, те се наричат **различни**. Означава се $A\neq B$.

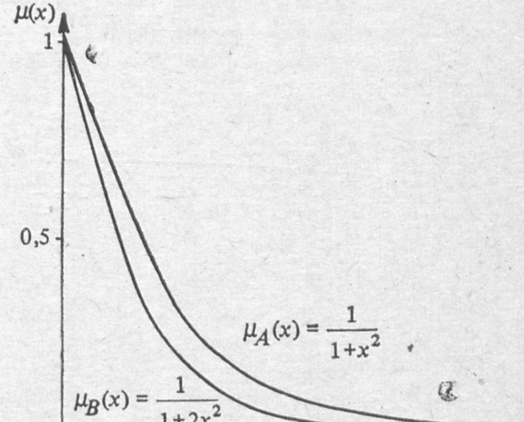
Свойство: Ако A и B са размити множества над X и $A\subseteq B$, то $\operatorname{supp} A\leqq\operatorname{supp} B$.

Това свойство няма аналог при обикновените множества и доказателството му следва непосредствено от определенията за подмножество и за носител на размито множество.

Пример: На фиг. 21 са дадени графиките на функциите на принадлежност на размитите множества A и B над $\mathbf{R}^+$, като $B\subseteq A$, защото графиката на $\mu_B(x)$ е под графиката на $\mu_A(x)$, т. е. за всяко $x\ (x\in X)$, $\mu_B(x)\leqq\mu_A(x)$. Функциите на принадлежност на A и B имат аналитичния вид:

$$\mu_A(x)=\frac{1}{1+x^2} \text{ за всяко } x\in\mathbf{R}^+,$$

$$\mu_B(x)=\frac{1}{1+2x^2} \text{ за всяко } x\in\mathbf{R}^+.$$



Фиг. 21. Пример за размито подмножество

3.2. ОПЕРАЦИИ ВЪРХУ РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

3.2.1. ДОПЪЛНЕНИЕ, ОБЕДИНЕНИЕ И СЕЧЕНИЕ

Ще разгледаме основните операции върху размити множества и някои свойства на тези операции.

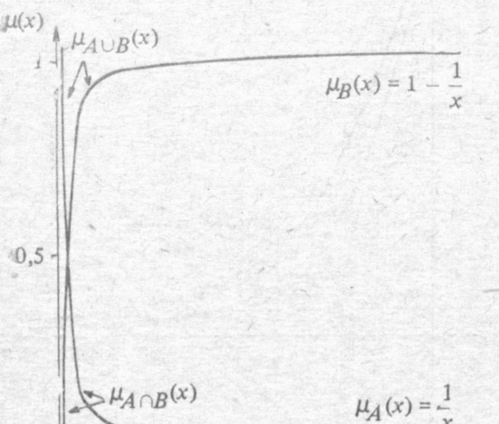
Операциите върху размити множества са разширения на операциите върху обикновени множества, тъй като обикновените множества могат да се разглеждат като частен случай от размитите множества, при който функцията на принадлежност приема стойност 0 и 1. Същевременно трябва да се отбележи, че няма пълна аналогия между операциите върху размити и обикновени множества. Така например при разлика между размити множества се използва гранична и симетрична разлика. Съществуват и нови операции: например разглежданата в следващата точка операция, наречена изпъкнала комбинация.

Трите най-често срещани операции върху размити множества са както и при обикновените множества — допълнение, обединение и сечение.

Определения: Нека A, B, C са размити множества над X.

1. Размитото множество B над X се нарича **допълнение** на A над X, ако $\mu_B(x)=1-\mu_A(x)$ за всяко x $(x\in X)$. Означава се $B=\bar{A}$.

2. Размитото множество C над X се нарича **обединение** на A над X и B над X, ако $\mu_C(x)=\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ за всяко x $(x\in X)$. Означава се $C=A\bigcup B$.



Фиг. 22. Пример за допълнение, обединение и сечение на размити множества

3. Размитото множество C над X се нарича **сечение** на A над X и B над X, ако $\mu_C(x)=\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ за всяко x $(x\in X)$. Означава се $C=A\bigcap B$.

Пример: На фиг. 22 са дадени графиките на функциите на принадлежност на размитите множеста A, B, $A\bigcup B$, $A\bigcap B$ над $[1, 100]$. Размитото множество A е множеството „непознаване на света“ във възрастовия интервал $[1, 100]$, дадено на фиг. 20. Размитото множество B е допълнението на A и може да се разглежда като „познаване на света". Аналитично $\mu_B(x) = 1-\frac{1}{x}$. Обединението и сечението на размити множества A и B имат съответно функции на принадлежност:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{ ако } 1\leqq x\leqq 2,\\ 1-\frac{1}{x}, \text{ ако } 2\leqq x\leqq 100,\end{cases}$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x}, \text{ ако } 1\leqq x\leqq 2,\\ \frac{1}{x}, \text{ ако } 2\leqq x\leqq 100.\end{cases}$$

Графиката на първата функция се получава от горните две части на графиките на функциите $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$, а графиката на втората функция — от долните две части на същите графики. Множеството $A\bigcup B$ можем да разглеждаме като „непознаване или познаване на света", а $A\bigcap B$ като „непознаване и познаване на света".

За така дефинираните операции между размити множества са в сила всички свойства, които изброихме за обикновените множества в 2.3., като трябва да се предполага, че размитите множества са над едно и също базово множество.

Ще илюстрираме начина за доказване на тези свойства, като докажем първия от законите на де Морган.

За да докажем, че $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$, трябва да установим, че:

$$1-\max[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]=\min[1-\mu_A(x),\ 1-\mu_B(x)].$$

1. В случая $\mu_A(x)>\mu_B(x)$, имаме

$$\max[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]=\mu_A(x),$$
$$\min[1-\mu_A(x),\ 1-\mu_B(x)]=1-\mu_A(x)$$

и интересуващото ни равенство се превръща в:

$$1-\mu_A(x)=1-\mu_A(x), \text{ което е тъждество.}$$

2. В случая $\mu_A(x)\leqq\mu_B(x)$ получаваме вярното равенство $1-\mu_B(x)=1-\mu_B(x)$.

Така получихме, че първият от законите на де Морган е в сила. Останалите свойства се доказват по подобен начин. Следващите свойства са характерни само за размити множества, дефинирани над едно и също базово множество

$$\operatorname{supp}(A\bigcup B)=(\operatorname{supp}A)\bigcup(\operatorname{supp}B),\quad \operatorname{supp}(A\bigcap B)=(\operatorname{supp}A)\bigcap(\operatorname{supp}B).$$

Тези равенства се проверяват лесно, като се използва определението за $\operatorname{supp}A$.

3.2.2. АЛГЕБРИЧНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ, СТЕПЕН И ИЗПЪКНАЛА КОМБИНАЦИЯ НА РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

Ще разгледаме и други често срещани операции между размити множества.

Определение. Размитото множество C над X се нарича **алгебрично произведение** на размитите множества A над X и B над X, ако: $\mu_C(x)=\mu_A(x).\mu_B(x)$ за всяко $x\,(x\in X)$. Означава се $C=A.B$.

Пример: На фиг. 23 са дадени графиките на функциите на принадлежност на размитите множества A и B над интервала $[1, 5]$ и тяхното алгебрично произведение. В този пример:

$$\mu_A(x)=\frac{1}{x} \text{ за } x\in[1, 5],$$

$$\mu_B(x)=\frac{1}{x^2} \text{ за } x\in[1, 5],$$

$$\mu_{A.B}(x)=\frac{1}{x^3} \text{ за } x\in[1, 5].$$

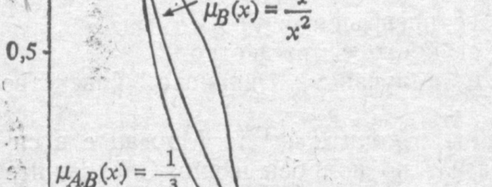
Определение. Размитото множество B над X се нарича **степен** α на размитото множество A над X, ако $\mu_B(x)=\mu_A^{\alpha}(x)$ за всяко $x\,(x\in X)$, където $\alpha\geqq 0$. Използва се означението $B=A^{\alpha}$.

Частен случай от операцията степенуване са операциите:

а) **идентитет** — $\mathrm{IND}(A)=A^1$;

б) **концентрация** — $\mathrm{CON}(A)=A^2$;

в) **разтягане** — $\mathrm{DIL}(A)=A^{0,5}$.



Фиг. 23. Пример за алгебрично произведение на размити множества

Пример: Да разгледаме предишния пример (фиг. 23). В него $\mathrm{CON}(A)=B$, $\mathrm{DIL}(B)=A$.

Операциите обединение сечение и алгебрично произведение на размити множества лесно могат да се обобщят и за n на брой размити множества ($n\geqq 2$).

Последната операция с размити множества, която ще разгледаме, е операцията изпъкнала комбинация, която се използва в [13] в задача за вземане на решения. Чрез тази операция от няколко размити множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, като се определя „степента" λ_i на участието на всяко от тях, може да се образува ново размито множество. Интересно е, че независимо от това дали $A_i (i=1, 2, \ldots, n)$ са размити или обикновени множества, B се получава размито множество. Това дава възможност за единен подход при многокритериалните задачи от оптимиране и вземане на решения.

Определение. Размитото множество B над X се нарича **изпъкнала комбинация** на размитите множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ над X, ако: $\mu_B(x)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{A_i}(x)$, където $\lambda_i \geqq 0$, $i=1, 2, \ldots, n\ (n \geqq 2)$, $\sum_{i}^{n} \lambda_i = 1$.

Използва се означението $B=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\cdots+\lambda_n A_n$.

Пример: Нека X е използваното вече множество $X=\{$Асен, Борис, Васил, Георги, Димитър, Емил$\}$ и нека A_1 е размитото множество „дисциплинирани ученици“

$A_1 =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
0,9	0,2	0	0,5	1	0,7

A_2 е размитото множество „ученици с висок успех“

$A_2 =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
1	0,2	0,9	0,3	0,8	0

A_3 е размитото множество „старателни ученици“

$A_3 =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
0,2	0,8	0,9	0,2	1	0

Сега множествата A_1 и A_2 носят повече информация, отколкото в 2.3. за качествата на учениците от групата. Нека $\lambda_1=0,6$, $\lambda_2=0,2$, $\lambda_3=0,2 \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i=1\right)$, тогава $B=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\lambda_3 A_3$ е:

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
0,78	0,32	0,36	0,4	0,96	0,42

Множеството B отчита в различна степен качествата: дисциплинираност, висок успех и старание на учениците от групата.

3.3. РАЗСТОЯНИЕ МЕЖДУ РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА. ИНДЕКС НА РАЗМИТОСТ

Използват се редица различни определения на понятието разстояние между две размити множества. Ще разгледаме най-често употребяваните.

3.3.1. ХЕМИНГОВО, ОТНОСИТЕЛНО ХЕМИНГОВО, ЕВКЛИДОВО И ОТНОСИТЕЛНО ЕВКЛИДОВО РАЗСТОЯНИЕ

За простота на изложението ще разгледаме случая, когато базисното множество X е крайно и има n елемента.

Аналогично на хемингово разстояние между две обикновени множества се дефинира и хемингово разстояние между две размити множества.

Определение. Нека A над X и B над X са две размити множества. **Хемингово разстояние** $d(A, B)$ между тях се нарича

$$d(A, B)=\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|.$$

Относително хемингово разстояние се нарича

$$\delta(A, B)=\frac{1}{n} d(A, B).$$

Пример: Нека X е познатото множество $X=\{$Асен, Борис, Васил, Георги, Димитър, Емил$\}$ и нека пресметнем разстоянието между размитите множества „ученици с висок успех“ и „старателни ученици“, дефинирани в 3.2.2. $d(A_2, A_3)=\sum_{i=1}^{6} |\mu_{A_2}(x_i)-\mu_{A_3}(x_i)|=0,8+0,6+0+0,1+0,2+0=1,7$,

$$\delta(A_2, A_3)=1,7:6\approx 0,28.$$

Резултатът показва, че разстоянието между двете размити множества е малко, т. е. множествата са близки едно до друго.

За така определените понятия са в сила свойства, аналогични на свойствата на хеминговото разстояние между обикновени множества.

Свойства. Хеминговото и относителното хемингово разстояние между размити множества са разстояния, в смисъл на дефиницията от 2.4., т. е. те притежават трите характерни свойства за всяко разстояние. Освен това $\delta(A, B)$ за всяко размито множество A над X и B над X е число в интервала $[0, 1]$. Доказателствата на тези свойства се извършват с непосредствена проверка.

По аналогия с евклидово разстояние между две точки в геометрията може да се дефинира и евклидово разстояние между две размити множества — понятие, което няма смисъл при обикновените множества.

Определение. Нека A над X и B над X са две размити множества. **Евклидово разстояние $e(A, B)$ се нарича:**

$$e(A, B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}.$$

Относително евклидово разстояние $\varepsilon(A, B)$ се нарича:

$$\varepsilon(A, B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\, e(A, B).$$

Пример: Нека A_2 над X и A_3 над X са размитите множества от предишния пример.
Тогава

$$e(A_2, A_3)=\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(\mu_{A_2}(x_i)-\mu_{A_3}(x_i))^2}$$

$$=\sqrt{0{,}8^2+0{,}6^2+0^2+0{,}1^2+0{,}2^2+0^2}=\sqrt{1{,}05}\approx 1{,}02,$$

$$\varepsilon(A_2, A_3)=\frac{\sqrt{1{,}05}}{\sqrt{6}}\approx\frac{1{,}02}{2{,}45}\approx 0{,}41.$$

За евклидовото разстояние между две размити множества са в сила същите свойства, които са в сила и за хеминговото разстояние между две размити множества.

3.3.2. ИНДЕКС НА РАЗМИТОСТ

Интересен е въпросът как се оценява размитостта на едно множество. За тази цел се въвежда понятието обикновено множество, най-близко до размито, и чрез него се определят числа в интервала $[0, 1]$, наричани индекси на размитост. Колкото индексът е по-голям, толкова множеството се смята по-размито. Приема се, че най-много допринасят за размитостта елементите със степен на принадлежност 0,5, докато елементите със степен на принадлежност 0 или 1 съдействат за отстраняване на размитостта в множеството.

Определение. **Обикновено множество, най-близко до размитото множество** A над X, се определя като подмножество на X с характеристична функция

$$\chi_{A'}(x)=\begin{cases}0, & \text{ако } \mu_A(x)<0{,}5;\\ 1, & \text{ако } \mu_A(x)\geqq 0{,}5 \text{ за всяко } x\in X.\end{cases}$$

Означава се A'.

П р и м е р: За познатото ни размито множество A_2 — „ученици с висок успех“ (дефинирано в примера от 3.2.2), обикновеното множество, най-близко до него, е $A_2'=\{$Асен, Васил, Димитър$\}$.

За обикновени множества, най-близки до размити множества, са в сила свойствата:

Свойство. Ако A над X и B над X са две размити множества:

1. $A'\bigcup B'=(A\bigcup B)'$;
2. $A'\bigcap B'=(A\bigcap B)'$,

т. е. обединението и сечението на най-близките множества до A и B е обикновено множество, най-близко съответно до $A\bigcup B$ и $A\bigcap B$.

Първото свойство може да се докаже, като се вземе произволен елемент от обикновеното множество $A'\bigcup B'$ и се покаже, че той принадлежи на множеството $(A\bigcup B)'$ и обратно. Нека $x\in A'\bigcup B'$, т. е. x принадлежи поне на едно от обикновените множества A' и B', т. е. x принадлежи поне на едно от размитите множества A и B със степен на принадлежност, по-голяма или равна на 0,5. Но това означава: че $x\in A\bigcup B$, също със степен на принадлежност, по-голяма или равна на 0,5, т. е. $x\in(A\bigcup B)'$. Аналогично се доказва обратното: ако $x\in(A\bigcup B)'$, то $x\in A'\bigcup B'$.

Второто свойство се доказва по същия начин.

Използват се два индекса на размитост.

Определение. **Линеен индекс на размитост** на размитото множество A над X се нарича $\nu(A)=\frac{2}{n}d(A, A')$, а **квадратичен индекс на размитост** се нарича $\eta(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}e(A, A')$.

П р и м е р: За разгледания по-горе пример

$A_2 =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
1	0,2	0,9	0,3	0,8	0

$A_2' =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
1	0	1	0	1	0

$$\nu(A_2) = \frac{2}{6}\,(0+0{,}2+0{,}1+0{,}3+0{,}2+0) = \frac{0{,}8}{3} \approx 0{,}27,$$

$$\eta(A_2) = \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{0^2+0{,}2^2+0{,}1^2+0{,}3^2+0{,}2^2+0^2} = \frac{2\sqrt{0{,}18}}{\sqrt{6}} \approx 0{,}34.$$

От изчислените индекси на размитост се вижда, че множеството на „учениците с висок успех“ от групата не е много размито.

За индексите на размитост е в сила свойството:

Линейният и квадратичният индекс на размитост на A над X са нула, ако A е обикновено подмножество на X и техните стойности са единица, ако $\mu_A(x)=0{,}5$ за всяко x $(x \in X)$.

3.4. НИВО НА РАЗМИТО МНОЖЕСТВО И ДЕКОМПОЗИЦИЯ НА РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

Едно от основните понятия в теорията на размитите множества е понятието ниво, което не се среща при обикновените множества.

Определение. Нека α е реално положително число. **Ниво** α **на размито множество** A над X се нарича обикновеното множество A, чиито елементи са от X и степента им на принадлежност към A не е по-малка от α, т. е.:

$$A_\alpha = \{x \mid x \in X,\ \mu_A(x) \geqq \alpha\}.$$

В случая $\alpha = 0{,}5$, A_α съвпада с A'.

Пример: Нека X е познатото ни множество от ученици, а A е размитото множество „ученици с висок успех“

$A =$

Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
1	0,2	0,9	0,3	0,8	0

Тогава $A_{0,3}=\{$Асен, Васил, Георги, Димитър$\}$, $A_{0,8}=\{$Асен, Васил Димитър$\}$, $A_{0,9}=\{$Асен, Васил$\}$.

Свойства. Ако A и B над X са две размити множества, то

1. $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$;
2. $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$,

където операциите $\cup$ и $\cap$ се извършват между обикновени множества.

3. Всяко размито множество може да се представи като обединение на своите нива. Това свойство се нарича **теорема за декомпозиция на размити множества** и може да се изкаже във вида: Ако A над X е размито множество, то A може да се представи като:

$$\mu_A(x)=\max\left(\alpha_1 \chi_{A_{\alpha_1}}(x),\ \alpha_2 \chi_{A_{\alpha_2}}(x), \ldots, \alpha_n \chi_{A_{\alpha_n}}(x)\right),$$

където $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$. $\chi_{A_{\alpha_i}}$ е характеристична функция на ниво α_i на A

Доказателството на тази теорема се извършва, като се преработи дясната част на равенството и се използва дефиницията за ниво на размито множество.

П р и м е р: Нека отново разгледаме размитото множество A от предния пример. Тогава теоремата за декомпозиция дава:

	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
$A =$	1	0,2	0,9	0,3	0,8	0

$= \max \{$

	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
0,2	1	1	1	1	1	0

,

	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
0,3	1	0	1	1	1	0

,

	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
0,8	1	0	1	0	1	0

.

	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
0,9	1	0	1	0	0	0

,

	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
1	1	0	0	0	0	0

}

$$
\begin{aligned}
= \max \{ & 0{,}2 \{\text{Асен, Борис, Васил, Георги, Димитър}\}; \\
& 0{,}3 \{\text{Асен, Васил, Георги Димитър}\}; \\
& 0{,}8 \{\text{Асен, Васил, Димитър}\}; \\
& 0{,}9 \{\text{Асен, Васил}\}; \\
& 1 \{\text{Асен}\}\} \\
= \max \{ & 0{,}2\, A_{0,2};\ 0{,}3\, A_{0,3};\ 0{,}8\, A_{0,8};\ 0{,}9\, A_{0,9};\ 1\, A_1\}.
\end{aligned}
$$

3.5. РАЗМИТИ РЕЛАЦИИ

Понятието размита релация е предложено от К. Менгер през 1951 г., а първата алгебрична система за пресмятане с размити релации е дадена от Д. Гоген през 1967 г. Въвеждането на това понятие става чрез обобщение на понятието релация между обикновени множества. Най-голям брой работи досега са свързани с изследване на размита двуместна релация. Повечето от използваните математически средства не са нови. Размитите релации освен свойствата на релациите между обикновени множества притежават и нови свойства, които ги правят удобни при решаване на редица задачи.

3.5.1. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

Понятието размита релация се определя по следния начин:

***Определение*. Размита двуместна релация** R **се нарича размито множество над декартовото произведение** $X \times Y$, характеризиращо се с функция на принадлежност $\mu_R(x, y)$, която на всяко x, y $((x, y) \in X \times Y)$ съпоставя число в интервала $[0,1]$. Значението на $\mu_R(x, y)$ може да се разгледа като субективна мярка за степента на изпълнение на релацията R. Релацията между обикновени множества може да се разглежда като частен случай на размитата релация с функция на принадлежност, вземаща стойности 0 и 1.

Пример: Нека $X = \{\text{Иван, Петър}\}$, $Y = \{\text{Стефан, Христо}\}$, тогава $X \times Y = \{(\text{Иван, Стефан}), (\text{Иван, Христо}), (\text{Петър, Стефан}), (\text{Петър,}$

Христо)}. Релацията „приятелство“ може да бъде дефинирана по следния начин:

„приятелство“ =

(Иван, Стефан)	(Иван, Христо)	(Петър, Стефан)	(Петър, Христо)
0,6	0,8	0,1	0,3

Всяка размита релация над декартовото произведение $X \times Y$, където X и Y са крайни множества, може да се представи и във вид на таблица. За нашия пример, тя е:

„приятелство“ X \ Y	Стефан	Христо
Иван	0,6	0,8
Петър	0,1	0,3

В случая, когато двете множества X и Y съвпадат, т. е. ако R е двуместна релация над $X \times X$, казва се, че R е двуместна релация над X.

В настоящото изложение размитите двуместни релации ще бележим предимно с буквите R, S, T. Поради това, че ще разглеждаме само двуместни релации, думата двуместни за в бъдеще ще изпускаме.

Тъй като размитата релация е размито множество, за нея са в сила всички понятия, дефинирани за размити множества. Така например:

Определение. **Носител на размита релация** R над $X \times Y$ — $\mathrm{supp}\, R$ се нарича подмножество на декартовото произведение $X \times Y$ с елементи

$$\mathrm{supp}\, R = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y, \mu_R(x, y) > 0\}.$$

Пример: За горния пример:
$\mathrm{supp}\, R = \{$(Иван, Стефан), (Иван, Христо), (Петър, Стефан), (Петър, Христо)$\}$.

Определение. Размитата релация R над $X \times Y$ се нарича **подрелация** на S над $X \times Y$, ако:

$$\mu_R(x, y) \leqq \mu_S(x, y) \text{ за всяко } (x, y) \in X \times Y \text{ и се означава } R \subseteq S.$$

Пример: Нека $X=Y$ е множеството на реалните положителни числа R^+ и нека R над X и S над X са дефинирани съответно с функции на принадлежност

$$\mu_R(x, y)=\frac{1}{1+(x-y)^2} \text{ за всяко } x, y \in R^+,$$

$$\mu_S(x, y)=\frac{1}{1+2(x-y)^2} \text{ за всяко } x, y \in R^+.$$

Тогава релацията S над X е подрелация на релацията R над X, т. е. $S \subseteq R$, защото $\mu_S(x, y) \leq \mu_R(x, y)$ за всяко $x, y \in R^+$.

3.5.2. ОПЕРАЦИИ ВЪРХУ РАЗМИТИ РЕЛАЦИИ

Някои от операциите между размити релации са аналогични на съответни операции между релации с обикновени множества, а други са специфични. Ще разгледаме само основните операции.

Определения. Нека R и S над $X \times Y$ са размити релации.

1. **Допълнение** на R се нарича релацията $\bar{R}$ над $X \times Y$ с функция на принадлежност $\mu_{\bar{R}}(x, y)=1-\mu_R(x, y)$.

2. **Обединение** на R и S се нарича релацията $R \cup S$ над $X \times Y$ с функция на принадлежност $\mu_{R \cup S}(x, y)=\max[\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)]$.

3. **Сечение** на R и S се нарича релацията $R \cap S$ над $X \times Y$ с функция на принадлежност $\mu_{R \cap S}(x, y)=\min[\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)]$.

4. **Обратна релация** на релацията R над $X \times Y$ се нарича релацията R^{-1} над $Y \times X$ с функция на принадлежност $\mu_{R^{-1}}(y, x)=\mu_R(x, y)$.

По аналогия с операциите върху размити множества могат да се дефинират и останалите операции върху размити релации. Аналогично както при размитите множества може да се покаже, че са в сила същите свойства при операциите върху размити релации.

Ще разгледаме някои операции, характерни само за размити релации.

Определения. **Първа проекция** на размитата релация R над $X \times Y$ се нарича размито множество над X с функция на принадлежност $\sup_{y \in Y} \mu_R(x, y)$. Означава се $R^{(1)}$.

Втора проекция на размитата релация R над $X \times Y$ се нарича размито множество над Y с функция на принадлежност $\sup_{x \in X} \mu_R(x, y)$. Означава се $R^{(2)}$.

Проекция на размитатата релация R над $X \times Y$ се нарича числото $\sup_{x \in X}[\sup_{y \in Y} \mu_{\bar{R}}(x, y)]$. Означава се $h(R)$. Ако $h(R)=1$, релацията се нарича **нормална**. В противен случай — **субнормална**.

Пример: Нека $X=\{$Иван, Петър$\}$, $Y=\{$Стефан, Христо$\}$ и е зададена релацията „познанство“ с таблицата:

„познанство“ X \ Y	Стефан	Христо
Иван	0,4	0,6
Петър	0	0,1

Тогава

$R^{(1)} =$

Иван	Петър
0,6	0,1

, $R^{(2)} =$

Стефан	Христо
0,4	0,6

и $h(R)=0{,}6$, т. е. релацията е субнормална.

Както при релациите между обикновени множества, така и тук най-типичната операция е операцията композиция. Съществуват два вида композиции:

Определения. Нека R и S над $X\times Y$ са размити релации.

1. **Максиминна композиция** $R\circ S$ над $X\times Z$ се нарича размитата релация с функция на принадлежност

$$\mu_{R\circ S}(x,\ z)=\sup_{y\in Y}[\min(\mu_R(x,\ y),\ \mu_S(y,\ z)].$$

2. **Минимаксна композиция** $R\circ S$ над $X\times Z$ се нарича размитата релация с функция на принадлежност $\mu_{R\circ S}(x,\ z)=\inf\limits_{y\in Y}[\max(\mu_R(x,y),$ $\mu_S(y,z)]$.

Ако имаме композиция на R над X със себе си, както при композицията между релации над обикновени множества се използва означението R^2 и съответно, ако имаме n-пъти композиция на R със себе си — R^n.

Ще разгледаме един пример за композиция на две размити релации.

Пример: Нека X е множеството на учениците от 1-ва група $X=\{$Асен, Борис, Васил, Георги, Димитър, Емил$\}$, Y е множеството на учениците от 2-ра група — $Y=\{$Иван, Петър$\}$ и Z е множеството на учениците от трета група — $Z=\{$Стефан, Христо$\}$ и нека са дадени релациите R над $X\times Y$ и S над $Y\times Z$, показващи познанството между учениците от 1-ва и 2-ра и от 2-ра и 3-та група съответно с таблиците:

R \ Y / X	Иван	Петър
Асен	0,9	0,8
Борис	0	1
Васил	0,2	0,4
Георги	0,7	0,5
Димитър	0,1	0,8
Емил	0,3	0,2

S \ Z / Y	Стефан	Христо
Иван	0,4	0,6
Петър	0	0,1

Тогава максиминната композиция T_1 и минимаксната композиция T_2 над $X \times Z$ се задават с таблиците:

T_1 \ Z / X	Стефан	Христо
Асен	0,4	0,6
Борис	0	0,1
Васил	0,2	0,2
Георги	0,4	0,6
Димитър	0,1	0,1
Емил	0,3	0,3

T_2 \ Z / X	Стефан	Христо
Асен	0,8	0,8
Борис	0,4	0,6
Васил	0,4	0,4
Георги	0,5	0,5
Димитър	0,4	0,6
Емил	0,2	0,2

където елементът t_{11} в първата таблица се получава като: ($t_{11} = \max[\min(0{,}9;\ 0{,}4);\ \min(0{,}8;\ 0)] = \max(0{,}4;\ 0) = 0{,}4$ и съответно във втората таблица: $t_{11} = \min[\max(0{,}9;\ 0{,}4);\ \max(0{,}8;\ 0)] = \min(0{,}9;\ 0{,}8) = 0{,}8$. T_1 и T_2 показват „познанството" на учениците от 1-ва и 3-та група. В зависимост от конкретната задача се предпочита едната или другата композиция.

3.5.3. ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА РАЗМИТИ РЕЛАЦИИ

Ще разгледаме основните свойства на размитата релация над X. Повечето от тях са аналогични на свойствата на релацията между обикновени множества.

Определения:

1. Размитата релация R над X се нарича **рефлективна**, ако $\mu_R(x, x) = 1$ за всяко $x \in X$.

В случай на крайно множество X по главния диагонал на таблицата, задаваща релацията, има единици.

2. Размитата релация R над X се нарича **ирефлективна**, ако $\mu_R(x, x) = 0$ за всяко $x \in X$.

В този случай, ако X е крайно, по главния диагонал на таблицата, задаваща релацията, има нули.

3. Размитата релация R над X се нарича **симетрична**, ако $\mu_R(x, y)=\mu_R(y, x)$ за всяко $x, y \in X$.

4. Размитата релация R над X се нарича **антисиметрична**, ако $\mu_R(x, y)\neq\mu_R(y, x)$ или ако $\mu_R(x, y)=\mu_R(y, x)$, те са равни на нула за всяко $x\neq y$ $(x\in X, y\in X)$.

5. Размитата релация R над X се нарича **транзитивна**, ако $R\circ R\subseteq R$, т. е. съществуват два вида транзитивност — минимаксна и максиминна в зависимост от това каква композиция използваме.

От дефиницията се вижда, че транзитивността се въвежда по различен начин от този при обикновените релации, като се използва едно от свойствата на транзитивните релации над обикновени множества.

Пример: Релацията R над X, зададена с таблицата

R \ X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	0	0	0
x_2	0	1	0,8	1	0
x_3	0	0,8	1	0,8	0
x_4	0	1	0,8	1	0
x_5	0	0	0	0	1

е рефлективна, симетрична и максиминно транзитивна, защото по главния диагонал има единици, $r_{ij}=r_{ji}$ за $i, j=1, 2,\ldots, 5$ и $R\circ R=R$, т. е. $R\circ R\subseteq R$

3.5.4. НИВО НА РАЗМИТА РЕЛАЦИЯ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ НА РАЗМИТИ РЕЛАЦИИ

Понятието ниво на размита релация се въвежда аналогично на понятието ниво на размито множество.

Определение. **Ниво α (α — реално положително число) на размита релация R над $X\times Y$ се нарича релацията над обикновени множества, дефинирана чрез $R_\alpha=\{(x, y) | x\in X, y\in Y, \mu_R(x, y)\geq\alpha\}$.**

Пример: Нека $X=\{$Иван, Петър$\}$ и $Y=\{$Стефан, Христо$\}$ и използваме релация „познанство“, зададена с таблицата

„познанство” $X \backslash Y$	Стефан	Христо
Иван	0,4	0,6
Петър	0	0,1

Тогава:

$R_{0,4}$ $X \backslash Y$	Стефан	Христо
Иван	1	1
Петър	0	0

$R_{0,6}$ $X \backslash Y$	Стефан	Христо
Иван	0	1
Петър	0	0

За ниво на размита релация важат същите свойства, които важат и за ниво на размито множество. В сила е и следното твърдение за декомпозиция, което може да се формулира по следния начин:

Ако R над $X \times Y$ е една размита релация, то тя може да се представи като: $\mu_R(x, y) = \max\limits_{\alpha_i} [\alpha_1 \chi_{R_{\alpha_1}}; \alpha_2 \chi_{R_{\alpha_2}}; \ldots; \alpha_n \chi_{R_{\alpha_n}}]$, където $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\chi_{R_{\alpha_i}}$ е характеристична функция на ниво α_i на R. Доказателството на твърдението е аналогично на доказателството на теоремата за декомпозиция на размити множества.

3.5.5. ВИДОВЕ РАЗМИТИ РЕЛАЦИИ

На фиг. 24 е дадена класификация на размитите релации в зависимост от техните свойства. Отделните видове релации притежават определени свойства. Така например:

Ако релацията R над X е релация на подобие, $1 - \mu_R(x, y)$ е разстояние между x и y, и ако R над X е релация на неподобие, $\mu_R(x, y)$ е разстояние между x и y.

Специален вид размита релация е релацията: „Ако A над X, то B над Y“, където A над X и B над Y са размити множества. Тази релация се нарича **„импликация на Заде“** и се дефинира като обединение от сеченията на A с B и на $\bar{A}$ с Y.

Пример: Нека $X =$ „етаж“ $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Y =$ „цена“ $= \{10\,000, 10\,500, 11\,000, 11\,500, 12\,000\}$ и са дадени размитите множества:

A над X – „ниско разположен апаратмент" =

1	2	3	4	5
1	0,8	0,2	0	0

B над Y – „висока цена" =

10 000	10 500	11 000	11 500	12 000
0,2	0,4	0,6	0,8	1

релация \ свойство	рефлективност	ирефлективност	максимин-на транзитивност	минимаксна транзитивност	симетричност	антисиметричност
подобие	да		да		да	
неподобие		да		да	да	
сходство	да				да	
несходство		да			да	
не строго нареждане	да		да			да
строго нареждане		да	да			да

Фиг. 21. Класификация на размити релации в зависимост от техни свойства

Тогава релацията R над $X \times Y$ — „Ако A — „ниско разположен апартамент", то B — „висока цена" "е:

$$R = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap Y)$$

R = (

1	2	3	4	5
1	0,8	0,2	0	0

$\cap$

10 000	10 500	11 000	11 500	12 000
0,2	0,4	0,6	0,8	1

) $\cup$ (

1	2	3	4	5
0	0,2	0,8	1	1

$\cap$

10 000	10 500	11 000	11 500	12 000
1	1	1	1	1

)

$=$

$A \cap B$ / Y / X	10 000	10 500	11 000	11 500	12 000
1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
2	0,2	0,4	0,6	0,8	0,8
3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

$\cup$

$\bar{A} \cap Y$ / Y / X	10 000	10 500	11 000	11 500	12 000
1	0	0	0	0	0
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
3	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1

$=$

Ако A, то B / Y / X	10 000	10 500	11 000	11 500	12 000
1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
2	0,2	0,4	0,6	0,8	0,8
3	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1

3.6. ИЗОБРАЖЕНИЯ НА РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

Какво наричаме изображение на едно множество в друго разгледахме в т. 2.5.7. А какво става с размитите множества при изображение?

Определение. Нека релацията $R: X \to Y$ задава едно изображение и нека A над X е размито множество с функция на принадлежност $\mu_A(x)$. **Образ на A** при изображението R се нарича размитото множество B над Y с функция на принадлежност: $\mu_B(y)=\max\limits_{x\in R^{-1}(y)}\mu_A(x)$, където $y\in Y$ и $R^{-1}(y)=\{x|x\in X,(x,y)\in R^{-1}\}$ за всяко y $(y\in Y)$.

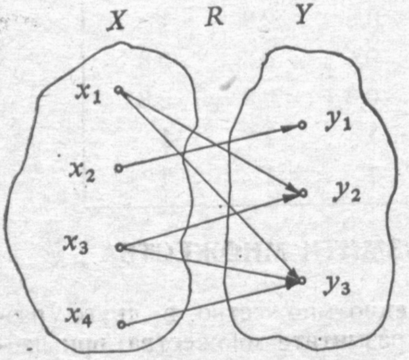
Пример: Нека $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$ и R се задава чрез таблицата:

R \ Y / X	y_1	y_2	y_3
x_1	0	1	1
x_2	1	0	0
x_3	0	1	1
x_4	0	0	1

Схематично изображението R на елементите на множеството X в Y е дадено на фиг. 25.

Тогава:

R^{-1} \ X / Y	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0	1	0	0
y_2	1	0	1	0
y_3	1	0	1	1



Фиг. 25. Схематично изображение R на елементите на множеството X в Y

и $R^{-1}(y_1)=\{x_2\}$, $R^{-1}(y_2)=\{x_1, x_3\}$, $R^{-1}(y_3)=\{x_1, x_3, x_4\}$.

Нека:

$$A=\left[\frac{x_1}{0{,}5}\;\frac{x_2}{0{,}7}\;\frac{x_3}{0{,}3}\;\frac{x_4}{0{,}2}\right]$$

Тогава: B над Y, получено чрез $R: X\to Y$, е

$$\mu_B(y_1)=\max(0{,}7)=0{,}7,$$
$$\mu_B(y_2)=\max(0{,}5;\ 0{,}3)=0{,}5,$$
$$\mu_B(y_3)=\max(0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}2)=0{,}5,$$ а

$B =$

y_1	y_2	y_3
0,7	0,5	0,5

Ще разгледаме случая, когато изображението е размита релация. Това изображение се нарича още **композиционно правило на Заде.**

То може да се определи по следния начин.

Определение. Нека R е размита релация (изображение) между множествата X и Y и нека A над X е размито множество. **Образ на A над X при изображението R** се нарича размитото множество B над Y с функция на принадлежност:

$$\mu_B(y)=\sup_{x\in X}\{\min[\mu_R(y,x),\ \mu_A(x)]\},\ \text{за } x\in X \text{ и } y\in Y.$$

Изборът на функцията на принадлежност на B над Y е продиктуван от съображението, че B може да се разгледа като втора проекция на сечението на две размити множества.

Пример: Нека $X=${висока температура, зачервено гърло, кашлица, главоболие}, $Y=${настинка, грип, пневмония} и нека е дадена релацията R над $X\times Y$, задаваща връзка между симптомите от X и болестите от Y с таблицата:

R \ Y / X	настинка	грип	пневмония
висока температура	0,8	1	0,8
зачервено гърло	0,7	0,8	0,2
кашлица	0,5	0,6	1
главоболие	0,4	0,7	0,5

Нека още е дадено едно размито множество A над X,

$A =$

висока температура	зачервено гърло	кашлица	главоболие
0,5	0,6	0,9	0,3

което съответства на пациента, който има висока температура със степен на принадлежност 0,5, зачервено гърло — 0,6, кашлица — 0,9 главоболие — 0,3.

Тогава на A над X съпоставяме множеството B над Y чрез изображението R.

Функцията на принадлежност на B над Y се изчислява по следния начин:

$$\mu_B(y_1)=\max_{x_i \in X}\{\min[\mu_R(y_1, x_i), \mu_A(x_i)]\}$$

$$=\max[\min(0{,}8;\ 0{,}5);\ \min(0{,}7;\ 0{,}6);\ \min(0{,}5;\ 0{,}9);\ \min(0{,}4;\ 0{,}3)]$$

$$=\max(0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}5;\ 0{,}3)=0{,}6;$$

$\mu_B(y_2)=0{,}6$, $\mu_B(v_3)=0{,}9$, т. е.

$B =$

настинка	грип	пневмония
0,6	0,6	0,9

т. е. болният със степен на принадлежност 0,6 принадлежи към болните от настинка и грип и с 0,9 — към болните от пневмония.

3.7. РАЗМИТИ ГРАФИ

Понятието размит граф се дефинира по аналогия на обикновен граф.

Определение. Нека X е произволно множество, различно от празното. Размита релация R над X се нарича **размит граф** и се означава $G=\{X, R\}$. Понятието **връх, дъга, начало и край на дъга, път, дължина на път, примка, контур, ребро, верига** и **цикъл** се определят по същия начин както при обикновените графи. **Стойност на пътя** се определя като $\min[\mu_R(u_1), \mu_R(u_2), \ldots, \mu_R(u_k)]$.

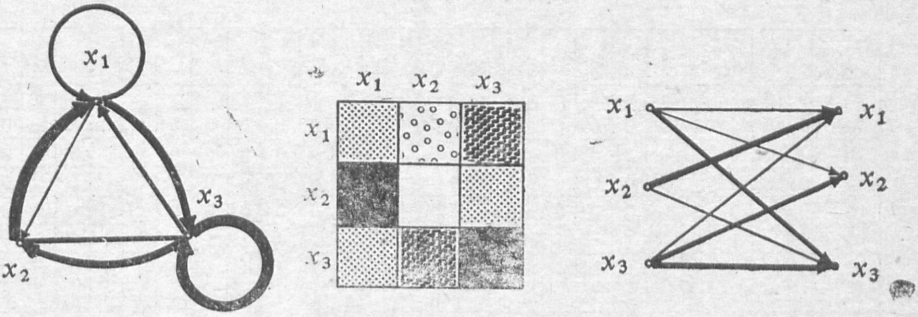
Ще разгледаме няколко примера:

1. Нека $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ и размитата релация R, задаваща размития граф $G=\{X, R\}$, е зададена с таблицата

R \ X, X	x_1	x_2	x_3
x_1	0,5	0,25	0,75
x_2	1	0	0,5
x_3	0,5	0,75	1

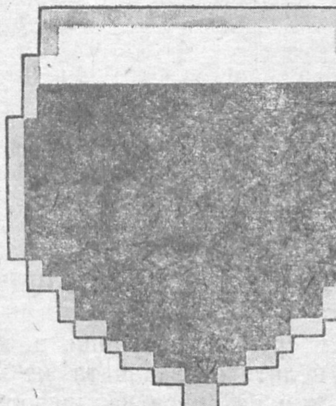
На фиг. 26 са дадени три различни графически представяния на този граф.

Един път в този граф е (x_1, x_2) (x_2, x_3), (x_3, x_3). Неговата дължина е 3, а неговата стойност е: $\min[\mu_R(x_1, x_2), \mu_R(x_2, x_3), \mu_R(x_3, x_3)]=\min(0{,}25;\ 0{,}5;\ 1)=0{,}25$.



Фиг. 26. Пример на различни графични представяния на един размит граф

2. Разделяме една черно-бяла снимка на $n.m$ части, където n и m са естествени числа. За всяка част оценяваме степента на принадлежността ѝ към бялото (т. е. въвеждаме скала за оценяване на сивите тонове между бялото и черното). Тази степен е 0, ако частта е бяла, 1 — ако е черна и число в интервала (0,1), ако е сива. Тогава снимката може да се разглежда като размит граф, дефиниран над нейните части, с функция на принадлежност степента на принадлежност на всяка нейна част към бялото. На фиг. 27 е показана една чаша, разглеждана като размит граф и таблицата на задаващата я размита релация (на с. 70).



Фиг. 27. Пример на размит граф

G: X \ Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_{20}	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}
x_1	0	0	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	0	0
x_2	0	0	,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	,5	0	0
x_3	0	0	,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	,5	0	0
x_4	0	,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	,5	0
x_5	0	,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	,5	0
x_6	0	,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5	0
x_7	0	,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5	0
x_8	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5
x_9	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5
x_{10}	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5
x_{11}	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5
x_{12}	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5
x_{13}	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5
x_{14}	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5
x_{15}	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5
x_{16}	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5
x_{17}	0	,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5	0
x_{18}	0	,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5	,5	0
x_{19}	0	0	,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5	0	0	0
x_{20}	0	0	0	,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5	0	0	0
x_{21}	0	0	0	0	,5	,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5	,5	0	0	0	0
x_{22}	0	0	0	0	0	0	,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	,5	0	0	0	0	0	0
x_{23}	0	0	0	0	0	0	0	,5	,5	1	1	1	1	1	1	,5	,5	0	0	0	0	0	0	0
x_{24}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	,5	,5	1	1	,5	,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{25}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	,5	,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{26}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	,5	,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{27}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	,5	0	0	,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{28}	0	0	0	0	0	,5	,5	,5	,5	,5	0	0	0	0	,5	,5	,5	,5	,5	0	0	0	0	0
x_{29}	0	0	0	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	,5	0	0	0
x_{30}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3.8. РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА И ВЕРОЯТНОСТИ

В редица задачи се срещат ситуации, в които обектът на изследване, условията и целите на задачата не могат да се опишат точно. Ако това се дължи на липса на информация, компенсира се обикновено чрез събиране на експериментални данни и чрез съставяне на стохастичен — вероятностен модел. Но съществува и друг вид неопределеност, свързана обикновено с ролята, която самият човек играе за изменчивостта на околната среда. Например човек определя едно момиче като хубаво и тази си оценка той не може да направи по-точна чрез повтаряне на някакъв експеримент. Явления, свързани с този вид неопределеност, обикновено, както видяхме, се изследват с помощта на теорията на размитите множества.

Тъй като понятията вероятност и размитост боравят с неопределеността на явленията съответно в двете ѝ споменати форми, между тях съществуват както определени сходства, така и някои различия. Сходството между понятията вероятност и размитост се подчертава и от факта, че функциите на принадлежност при размитите множества, както и вероятността в теорията на вероятностите, вземат стойности в един и същ интервал [0,1]. От друга страна, вероятността е обективна характеристика, т. е. изводите на теорията на вероятностите могат да се проверят с опити, докато степента на принадлежност се определя субективно, въпреки че е естествено по-малка степен на принадлежност да се преписва на това събитие, което разглеждано от вероятностна гледна точка, има по-малка вероятностна стойност. Различни са и операциите в двете теории, което вече беше изтъкнато.

През 1968 г. Л. Заде направи теоретичен опит да обобщи за размитите множества някои постановки на аксиоматичната теория на вероятностите чрез въвеждане на понятието размито събитие.

3.8.1. РАЗМИТО СЪБИТИЕ. ВЕРОЯТНОСТ НА РАЗМИТО СЪБИТИЕ

Определения:

1. **Размито събитие** се нарича всяко размито множество A над пространството на елементарните събития X ($X \subseteq R^n$).

За простота на изложението ще предполагаме, че X е крайно множество с n-елемента.

2. **Вероятност на размито събитие** A над X се нарича числото $P(A)=\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)\,p(x_i)$, където $\mu_A(x)$ е функцията на принадлежност на A над X, а $p(x_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ са вероятностите на елементарните събития $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример: Нека е дадена една мишена и пространството на елементарните събития е $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Вероятностите за оцелване на съответните области са дадени на фиг. 28. Стреля се един път. Нека размитото събитие A над X „да се оцели близко до 9“ е:

$A =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0,1	0,5	0,9	1	0,9

Тогава:

$$P(A) = 0{,}1\,.\,0{,}2 + 0{,}5\,.\,0{,}1 + 0{,}9\,.\,0{,}1 + 1{,}0\,.\,0{,}05 + 0{,}9\,.\,0{,}05 = 0{,}255,$$

т. е. вероятността да се оцели близко до 9 е 0,255.

Фиг. 28. Пример на мишена с дадени вероятности за попадение в съответните области

Свойства:

Основните свойства на вероятността на едно размито събитие A над X са:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\varnothing)=0$.
3. $P(X)=1$.
4. Ако размитото събитие A над X е обединение от размитите събития B над X и C над X, т. е. $A=B\bigcup C$, то

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C).$$

Ще покажем, че свойството 4 е в сила. По дефиниция за всяко $x \in X$ имаме:

$$\mu_{A\bigcup B}(x)=\max[\mu_A(x),\ \mu_B(x)].$$
$$\mu_{A\bigcap B}(x)=\min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)].$$

Събираме двете равенства и получаваме

$$\mu_{A\bigcup B}(x)+\mu_{A\bigcap B}(x)=\max[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$$
$$+\min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]=\mu_A(x)+\mu_B(x)$$

или, което е същото:

$$\mu_{A\bigcup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_{A\bigcap B}(x),$$

т. е. имаме

$$\mu_{A\bigcup B}(x_1)=\mu_A(x_1)+\mu_B(x_1)-\mu_{A\bigcap B}(x_1),$$
$$\mu_{A\bigcup B}(x_2)=\mu_A(x_2)+\mu_B(x_2)-\mu_{A\bigcap B}(x_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mu_{A\bigcup B}(x_n)=\mu_A(x_n)+\mu_B(x_n)-\mu_{A\bigcap B}(x_n).$$

Умножаваме първия ред на тези уравнения с $p(x_1)$, втория с $p(x_2)$ и т. н., последния с $p(x_n)$ и ги събираме. Получаваме търсеното равенство.

.9. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

1. Да се докаже, че за размитото множество A над X са в си ...

а) $A\bigcup\varnothing=A$;

б) $A\bigcap\varnothing=\varnothing$;

в) $A\bigcup U=U$;

г) $A\bigcap U=A$.

2. Дадени са размитите множества A, B, C над X:

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	0,5	0,3	0,1	0,7	0

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0,7	0,4	0,9	0,8	0,7	1

$C =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0,1	0	0,8	0,9	0,9	1

а) да се построят размитите множества:

$$A\bigcup B\bigcap C,\ \mathrm{CON}(A\bigcap \overline{B}),\ \mathrm{DIL}(\overline{A\bigcup C}\bigcap B);$$

б) да се изчисли хеминговото и евклидовото разстояние между A и B;

в) да се изчисли относителното хемингово и евклидово разстояние между A и C;

г) да се изчисли линейният и квадратичният индекс на размитост на C;

д) да се построят $A_{0,5}$, $A_{0,7}$, $B_{0,9}$.

3. Да се докажат свойствата на операциите между размити множества.

4. Да се състави таблицата, съответстваща на размития граф на една ваша снимка, по начина, показан в 3.7.

5. Дадени са размитите релации R и S с таблиците:

R (X \ Y)	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,5	0,4	0,3	0
x_2	0,7	1	0,9	0,4
x_3	0,5	0,7	0,4	0,2

S (Y \ Z)	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
y_1	0,1	0,2	0,5	0,7	0,6
y_2	1	0	0,4	0,3	1
y_3	0	0,1	0,3	0,2	0,4
y_4	0,9	0,8	0,6	0,5	1

а) да се изчисли supp R;

б) да се изчисли минимаксна композиция $R \circ S$;

в) да се изчисли максиминна композиция $R \circ S$;

г) да се изчисли $R_{0,5}$, $S_{0,4}$;

д) да се изчисли първата и втората проекция на R и S.

6. Дадени са размитите релации R_1, R_2, R_3, R_4 над X с таблиците:

R_1 X \ X	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,5	0,4	0,7
x_2	0,5	1	0,2	0
x_3	0,4	0,2	1	0,5
x_4	0,7	0	0,5	1

R_2 X \ X	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0,7	0,1	0,1
x_2	0,7	0	0,7	0
x_3	0,2	0,7	0	1
x_4	0,1	0	1	0

R_3 X \ X	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0,5	0
x_3	0	0,5	1	0
x_4	0	0	0	1

R_4 X \ X	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0,9	0,8	0,7
x_2	0	0	0,6	0,6
x_3	0	0	0	0,7
x_4	0	0	0	0

а) да се изброят свойства, притежавани от всяка от горните релации;

б) да се определи видът на всяка от горните релации според класификацията, дадена на фиг. 24.

7. Да се докаже теоремата за декомпозиция при размити множества.

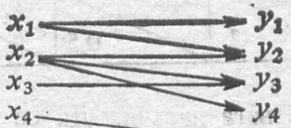
8. Да се построи релацията „Ако A е чист минерал, неговата цена B е висока", като се дефинират необходимите размити множества.

9. Нека $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ и

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4
0,5	0,7	1	0,9

и нека изображението $R: X \to Y$ е зададено чрез схемата



Да се построи **B** над Y, получено като образ на A над X, след прилагане на $R: X \to Y$.

10. Нека $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$,

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4
0,5	0,7	1	0,3

и нека е дадено изображението $R: X \to Y$ чрез таблицата:

R (X \ Y)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,7	0,9	1	0,5
x_2	0,2	0,1	0,3	0,8	0,7
x_3	0,8	0,7	0,9	1	0,5
x_4	1	0,5	0,4	0,1	0,3

Да се построи B над Y като образ на A над X след $R: X \to Y$.

11. Двама шахматисти Иван и Васил играят турнир от 4 партии. Известно е, че ако:

Иван победи в една партия:
— вероятността да победи в следващата е 1/2;
— вероятността да завърши наравно следващата е 1/4;
— вероятността да загуби следващата е 1/4.

Иван завърши наравно в една партия:
— вероятността да победи в следващата е 3/8;
— вероятността да завърши наравно в следващата е 1/2;
— вероятността да загуби следващата е 1/8.

Иван загуби една партия:
— вероятността на победи в следващата е 1/8;
— вероятността да завърши наравно следващата е 1/4;
— вероятността да загуби следващата е 5/8.

Под събитието „една партия да завърши добре“ Иван разбира размитото множество:

победа	наравно	загуба
1	0,5	0

Иван спечелил първата партия. Да се изчисли каква е вероятността да завърши добре според него втората и четвъртата партия?

ГЛАВА 4

НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА РАЗМИТИТЕ МНОЖЕСТВА

4.1. ВЪВЕДЕНИЕ

Съществуват голям брой приложения на теорията на размитите множества в най-различни области. Една част от тях се базират на реални данни и намират приложение в практиката, но далеч не всички. Не при всички са направени сравнения с използваните преди това средства. Най-често разработките имат експериментален характер и се търси къде е възможно, къде е полезно, къде е най-силно приложението на апарата на размитите множества. Като че ли досега се отговаря предимно на въпроса къде е възможно използването на този апарат, а доколко и къде е най-ефективно, все още не е установено.

Най-често теорията на размитите множества се прилага в научни области като: лингвистика, теория за вземане на решения, информатика, управление, изкуствен интелект, изследване на операциите, медицина и биология, икономика и география и др.

В настоящата глава няма да бъдат засегнати всички досегашни приложения на теорията на размитите множества, тъй като ще са нужни познания в много области, с които младият читател все още не е запознат. Ще изброим някои от приложенията на теорията на размитите множества в различни области и ще разгледаме някои конкретни примери в лингвистиката, при вземане на решения и при построяване на информационно-търсещи системи. Разглежданите приложения са подбрани с цел да дават представа за начините на прилагане на теорията на размитите множества при решаване на конкретни практически задачи.

4.2. ПРИЛОЖЕНИЯ В ЛИНГВИСТИКАТА

Езикът е възникнал като средство за общуване между хората. Характерно е неговото богатство, откъдето идва и неговата неопределеност. Един и същ факт може да се изкаже по много различни начини. В езика съществуват омоними (еднакви думи с различно значение) и синоними (различни думи с еднакво значение). Граматичните правила са относително свободни и рядко са строго детерминирани. Отделни граматични единици, като „близо“, „около“ и др. показват, че думите след тях нямат точно определено значение. Именно затова едно от първите приложения на теорията на размитите множества е направено в лингвистиката—науката за езика.

Основните идеи по използването на теорията на размитите множества в лингвистиката се съдържат в книгата на Л. Заде — „Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенны решений“ [8]. Те се базират на понятието лингвистична променлива.

Определение. **Лингвистична променлива** се нарича променлива, чийто стойности са думи на естествен или изкуствен език. Съвкупността от стойностите на лингвистичната променлива се нарича **терм множество** на тази променлива и се означава с T. То представлява съвкупност от размити множества, определени над едно и също базово множество.

Пример за лингвистична променлива е изразът „температура на водата“, чиито стойности са думи от естествения език — „ниска“, „средна“ и „висока“. Терм множеството на лингвистичната променлива „температура на водата“ може да се запише по следния начин: T („температура на водата“)={„ниска“, „средна“, „висока“}.

Стойностите на лингвистичната променлива не са така конкретни както тези на числовите променливи. Така например едно е да се знае, че в даден момент стойността на една числова променлива T е 10 °C, друго е да се знае, че стойността на лингвистичната променлива „температура на водата“ е „ниска“.

На фиг. 29 е показана структурата на лингвистична променлива „температура на водата“, като стойностите ѝ са определени над базовото множество, представляващо интервала [0, 100].

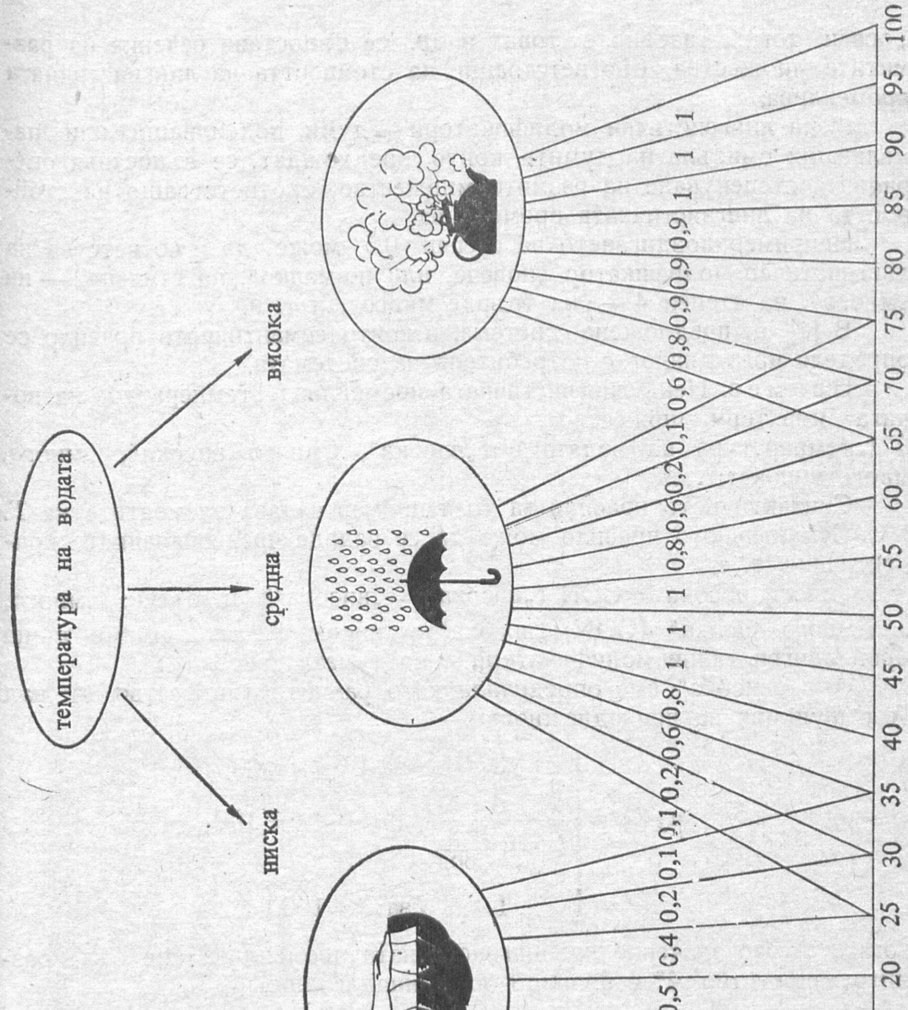
Една лингвистична променлива се определя чрез две правила. Първото правило се нарича **синтактично правило.** То определя стойностите на лингвистичната променлива. Второто правило се нарича **семантично правило** и определя начина за изчисляване стойностите на лингвистичната променлива.

Определение. **Семантичното правило** може да се определи чрез следните правила:

а) на думи, които изразяват отрицание, като „не“ и други, се съпоставя допълнение на размитото множество, съответстващо на съответната стойност на лингвистичната променлива;

б) на думи, които изразяват „или“, като „или“, „ту...ту“, „нито... нито“ (съответно с отрицание), се съпоставя обединение на размитите множества, съответстващи на стойностите на линвистичната променлива;

в) на думи, които изразяват „и“, като „и“, „но“, „при това“,



Фиг. 29. Структура на лингвистичната променлива „температура на водата"

„освен това“, „заедно с това“ и др., се съпоставя сечение на размитите множества, съответстващи на стойността на лингвистичната променлива;

г) на лингвистични модификатори — думи, подсилващи или намаляващи смисъла на думите, които предхождат, се съпоставя операцията степенуване на размито множество, съответстващо на стойността на лингвистичната променлива.

Например повдигането на степен 0,5 може да съответства на лингвистичен модификатор „повече или по-малко“, на степен 2 — на „много“, на степен 4 — „на твърде много“, и т. н.

В [4] е предложена система, в която семантичното правило се определя чрез диалог с потребителя на системата.

Пример: Нека лингвистичната променлива „температура на водата“ има терм множество:
T („температура на водата“) = {„висока“, „много висока“, „много, много висока“; ...}

Синтактичното правило за този пример задава елементите на T.

Семантичното правило може да се зададе чрез операцията концентрация, т. е.

„много висока“ = CON („висока“) = „висока“^{2} и оттук: „много, ..., много висока“ = CON („висока“) = „висока“$^{2^n}$, ако имаме n на брой лингвистични модификатори пред думата „висока“.

Ако „висока“ сме определили като размито множество A над X с функция на принадлежност

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } 0 \leqq x \leqq 60, \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{16}{(x-60)^2}} & \text{за } 60<x<100, \\ 1 & \text{за } x=100. \end{cases}$$

тогава n-тото значение на лингвистичната променлива ще бъде размито множество A^n с функция на принадлежност

$$\mu_{A^n}(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } 0 \leqq x \leqq 60, \\ \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{16}{(x-60)^2}\right)^{2n}} & \text{за } 60<x<100, \\ 1 & \text{за } x=100. \end{cases}$$

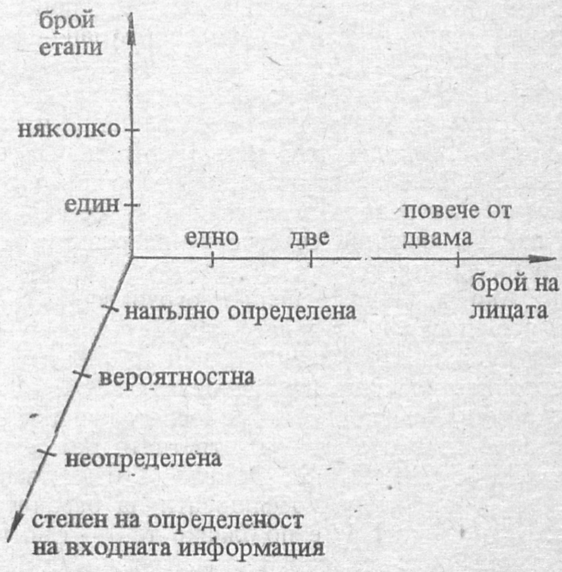
С използване на теорията на размитите множества в лингвистиката са интересни например работите за анализ на немската поезия от 11 в. и за моделиране на семантичния аспект на естествени езици.

4.3. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИ ВЗЕМАНЕ НА РЕШЕНИЯ

Многократно в личния, обществения, социалния и политическия живот човек е принуден да взема определени решения. За вземане на решения, които са от масова значимост, се създават и специализирани органи. Например Народното събрание е един такъв орган, който взема решения от национален мащаб. Неговите решения са във вид на закони, които гражданите в съответната страна са задължени да спазват.

Какво представлява самият процес на вземане на решения? Какви са случаите на вземане на решение? От какво зависи дадено решение? Съществуват математически теории, занимаващи се с въпроси като тези. Корените на някои от тях, като например статистическата теория за вземане на решения, могат да се открият още в 18 в. и 19 в., а най-значителното развитие на повечето от тях се извършва в последните две- три десетилетия. За развитието на теорията за вземане на решения е способствало развитието на различни клонове от науката, като статистика, икономика, право, психология, наука за управление и др.

Класификация на съществуващите теории за вземане на решения се съдържа в [22] в зависимост от броя на лицата, участващи в процеса на вземане на решения (едно, две, повече от две), според броя на етапите, през които се минава до вземането на решението (едностъпково или многостъпково вземане на решение), според характера и степента на неопределеност на входната информация (цялата информация е определена, информацията е вероятностна, няма точна информация). За нагледност на класификацията тези теории могат да се изобразят като точки в една координатна система — фиг. 30.



Фиг. 30. Класификация на теориите за вземане на решения

Повечето от тези теории за вземане на

решения, най-общо казано, се покриват от други добре известни математически теории, като: статистическата теория за вземане на решения (при участие на повече от две лица), теория на игрите за двама души (при участие на две лица), теория на игрите и теория за колективно вземане на решение (при участие на повече от две лица), теория на динамичните системи (при многостъпково вземане на решение).

В настоящата книга няма да изложим използването на размитите множества в различните аспекти при вземане на решения, тъй като ще са нужни познания от теорията на динамичните системи, линейното и динамичното програмиране, теорията на игрите и т. н. В следващите страници ще разгледаме само няколко конкретно дефинирани задачи, които ще дадат известна представа за прилагането на теорията на размитите множества за вземане на решения. Това са задачи, при които вземащите решения са успели да формулират точно входните условия и при които математикът предлага решение, като използва апарата на размитите множества.

4.3.1. ПОДХОД НА БЕЛМАН—ЗАДЕ В ЗАДАЧИ СЪС ЗАДАДЕНИ ЦЕЛИ И ОГРАНИЧЕНИЯ

Задачата за вземане на решения при зададени цели и ограничения е дефинирана и решена от Белман—Заде [1].

Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са размити множества над множеството X, и представляват цели, които вземащият решения преследва; $B_1, B_2, \ldots, B_k$ са размити множества над X и представляват ограничения с които вземащият решение трябва да се съобразява. Подходът на Белман—Заде предлага решението, което удовлетворява максимално поставените цели и ограничения, да се търси като размито множество C над X, явяващо се сечение на размитите множества на целите и ограниченията.

Ако различните цели и ограничения са в различна степен важни за решението на задачата, тогава то приема следния вид:

Нека с $A_1, A_2, \ldots, A_n$ над X означим целите, с $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — тегловите коефициенти на целите ($0 \leqq \alpha_i \leqq 1$, $i=1, 2, \ldots, n$ и колкото α_i е по-близко до 0 — съответната цел е по-маловажна, а колкото е по-близко до 1 — съответната цел е по-съществена за решението), с $B_1, B_2, \ldots, B_k$ над X означаваме ограниченията, с $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — тегловите коефициенти на ограниченията ($0 \leqq \beta_j \leqq 1$, $j=1, 2, \ldots, k$ и колкото β_j е по-близко до 0 — съответното ограничение е по-маловажно, а колкото β_j е по-близко до 1 — по съществено).

Решението на тази задача представлява размито множество C над X с функция на принадлежност $\mu_C(x) = \min[\alpha_1 \mu_{A_1}(x), \alpha_2 \mu_{A_2}(x), \ldots, \alpha_n \mu_{A_n}(x), \beta_1 \mu_{B_1}(x), \beta_2 \mu_{B_2}(x), \ldots, \beta_k \mu_{B_k}(x)]$.

П р и м е р: Нека при производството на стомана имаме размитата цел: „Температурата да е близка до тази в интервала 880 °C—940 °C“, зададена с размитото множество:

A =

850° C	860° C	870° C	880° C	890° C	900° C
0	0,2	0,7	0,9	1	1

910° C	920° C	930° C	940° C	950° C	960° C	970° C
1	[illegible]	1	0,9	0,7	0,2	0

и техническите характеристики на пещта, където се произвежда стоманата, имат следните ограничения: „Препоръчва се температурата да е по-висока от 900 °C“ и „Препоръчва се температурата да е по-ниска от 910 °C“, зададени с размитите множества B_1 и B_2:

B_1 =

850° C	860° C	870° C	880° C	890° C	900° C
0	0	0	0,2	0,5	0,8

910° C	920° C	930° C	940° C	950° C	960° C	970° C
1	1	1	1	1	1	1

B_2 =

850° C	860° C	870° C	880° C	890° C	900° C
1	1	1	1	1	1

910° C	920° C	930° C	940° C	950° C	960° C	970° C
0,8	0,5	0,2	0	0	0	0

Решаваме задачата чрез подхода на Белман—Заде при $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0{,}5$, $\beta_2 = 0{,}5$. Тогава решението е размитото множество:

C =

850° C	860° C	870° C	880° C	890° C	900° C
0	0	0	0,1	0,25	0,4

910° C	920° C	930° C	940° C	950° C	960° C	970° C
0,4	0,25	0,1	0	0	0	0

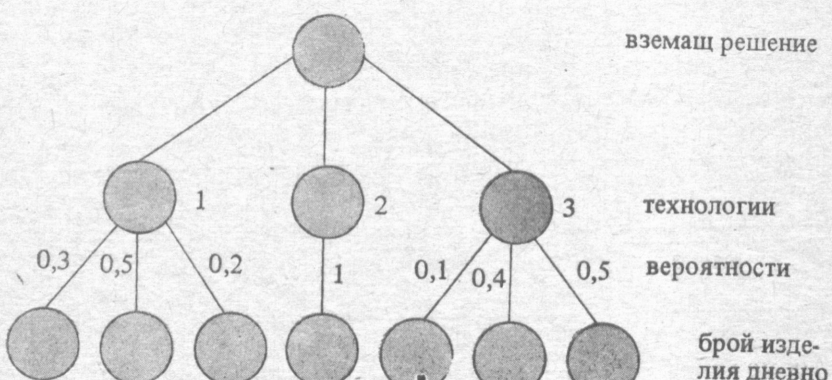
което може да се тълкува като „Температурата да е близо до тази в интервала 900 °C—910 °C“.

4.3.2. ПОДХОД НА ЯГЕР В ЗАДАЧИ СЪС ЗАДАДЕНА ЦЕЛ И ВЕРОЯТНОСТНИ СТОЙНОСТИ ЗА ОТДЕЛНИТЕ ВЪЗМОЖНОСТИ

Съществуват случаи, при които вземащият решение преследва дадена цел (зададено размито множество), като разполага с вероятностна информация за отделните възможности, измежду които трябва да избере. Тази задача е формулирана в [28]. Решението се търси, като се изчислява вероятността за достигане на целта спрямо всяка от възможностите.

Пример: В един завод се внедрява ново производство. Известно е, че съществуват три технологии за това производство. От прилагането на тези технологии в други предприятия се знае, че при първата — с вероятност 0,3 — количеството на продукцията е 15 000 броя дневно, с вероятност 0,5—20 000 броя дневно и с вероятност 0,2—30 000 броя дневно; за втората технология — 20 000 броя дневно; за третата технология — с вероятност 0,1—10 000 броя дневно, с вероятност 0,4—20 000 броя дневно и с вероятност 0,5—40 000 броя дневно (фиг. 31). Размитото множество „високо дневно производство" е дефинирано като:

10 000	15 000	20 000	30 000	40 000
0,2	0,6	0,8	1	1



Фиг. 31. Пример на задача за вземане на решения със зададена цел и вероятностни стойности за отделните възможности

Решението на задачата за намиране на технология, осигуряваща „високо дневно производство", се търси, като се изчисляват вероятностите да има „високо дневно производство" при всяка една от технологиите:

P(„високо дневно производство" при технология 1) $=0{,}6 \,.\, 0{,}3 + 0{,}8 \,.\, 0{,}5 + 1 \,.\, 0{,}2 = 0{,}78$,

P(„високо дневно производство" при технология 2) $= 1 \,.\, 0{,}8 = 0{,}8$,

P(„високо дневно производство" при технология 3) $= 0{,}2 \,.\, 0{,}1 + 0{,}8 \,.\, 0{,}4 + 1 \,.\, 0{,}5 = 0{,}84$,

откъдето получаваме, че най-голяма вероятност за „високо дневно производство" се получава при внедряване на третата технология.

4.3.3. ПОДХОД НА ОРЛОВСКИ ПРИ ЗАДАЧИ ЗА КОЛЕКТИВНО ВЗЕМАНЕ НА РЕШЕНИЯ

Задачата за колективно вземане на решение е характерна с това, че в процеса на вземане на решение участват няколко експерти, които изказват своето мнение. В зависимост от начина на изразяване на оценката тя може да се формулира по различни начини. Един подход е предложен от Кузмин [9]. Ще бъде разгледан друг подход предложен от Орловски, за решаване на тази задача.

Задачата за колективно вземане на решения е формулирана в [13] по следния начин: Нека е дадено множество от обекти $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и група от n експерти $E=\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, които задават предпочитанията си като размита релация над множеството от обекти, т. е. известни са функциите $\mu_{E_k}(a_i, a_j)$ $(i, j=1, 2, \ldots, m, k=1, 2, \ldots, n)$, значенията на които се интерпретират като степени на предпочитание на a_i пред a_j от k-тия експерт. Освен това е зададена размита релация в множеството от експерти $\mu_E(E_k, E_l)$ $(k, l=1, 2, \ldots, n)$, значенията на която се интерпретират като степени на компетентност на експерта E_k спрямо E_l.

Орловски предлага следната процедура за решаване на така поставената задача:

а) Построяват се релациите „строго предпочитание на a_i пред a_j според E_k" над $A \times A - R^S_{E_k}(a_i, a_j)$ $(i, j=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n)$ чрез формулата:

$$\mu_{R^S_{E_k}}(a_i, a_j)=\begin{cases}\mu_{E_k}(a_i, a_j)-\mu_{E_k}(a_j, a_i), & \text{ако } \mu_{E_k}(a_i, a_j) \geqq \mu_{E_k}(a_j, a_i),\\ 0 & \text{в противен случай.}\end{cases}$$

б) Намират се размити множества „недоминиране на a_i пред a_j" над A за всеки от експертите. Функциите на принадлежност $\varphi_{E_k}(a_j)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ на тези множества се изчисляват, като:

$$\underline{\varphi_{E_k}}(a_j) = 1 - \sup_{a_i \in A} \mu_{R^S_{E_k}}(a_i, a_j).$$

в) Намира се размитата релация „предпочитание на a_i пред a_j “над $A \times A$ съобразно компетентността на експертите. Нейната

R_E (E \ E)	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1	1	0,6	0,7	1	0
E_2	0,5	1	1	0	0,4
E_3	0,4	0,7	1	0,5	1
E_4	0,9	0,1	0,3	1	0
E_5	0,5	0	0	1	1

R_{E_1} (A \ A)	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	1	0,4	0,3	0,2	0,5	0,2
Борис	0,8	1	0,7	0,6	0,7	1
Васил	0,6	0,8	1	0,7	0,9	0,6
Георги	0,5	0,4	0,5	1	0,6	0,7
Димитър	0	0,1	0,2	0,4	1	0,1
Емил	1	0,9	0,8	1	0,7	1

R_{E_2} (A \ A)	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	1	0,1	0,3	0,9	0	0,2
Борис	0,9	1	0,9	1	0,1	0,3
Васил	0,7	0,1	1	0,7	0,2	0,5
Георги	0,1	0	0,3	1	0	0
Димитър	1	0,9	0,8	1	1	0,2
Емил	0,8	0,7	0,5	1	0,8	1

R_{E_3} (A \ A)	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	1	0,8	0,7	0,9	0,8	0,9
Борис	1	1	1	1	1	1
Васил	0,3	0	1	0,6	0,7	0,4
Георги	0,1	0	0,4	1	0,1	0,2
Димитър	0,2	0	0,3	0,9	1	0,6
Емил	0,1	0	0,6	0,8	0	1

R_{E_4} (A \ A)	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	1	1	1	0,9	1	0,9
Борис	0	1	0,6	0,4	0,6	0,8
Васил	0	0,4	1	0	0	0
Георги	0,1	0,4	0,2	1	0	0
Димитър	0,1	0,9	0,9	1	1	1
Емил	0,1	0,8	0,7	1	1	1

R_{E_5} (A \ A)	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	1	0	0	0,3	0	0
Борис	0,9	1	0,7	0,1	0,6	0,5
Васил	1	0	1	0,2	1	0
Георги	0	0	0	1	0	0
Димитър	1	0	0	0,1	1	0
Емил	1	1	1	0,1	1	1

Фиг. 32. Входни данни от пример на задача за колективно вземане на решения чрез подхода на Орловски

$R^S_{E_1}$ A \ A	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	0	0	0	0	0,5	0
Борис	0,4	0	0	0,2	0,6	0,1
Васил	0,3	0,1	0	0,2	0,7	0
Георги	0,3	0	0	0	0,2	0
Димитър	0	0	0	0	0	0
Емил	0,8	0	0,2	0,3	0,6	0

$R^S_{E_2}$ A \ A	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	0	0	0	0,8	0	0
Борис	0,8	0	0,8	1	0	0
Васил	0,4	0	0	0,4	0	0
Георги	0	0	0	0	0	0
Димитър	1	0,8	0,6	1	0	0
Емил	0,6	0,4	0	1	0,6	0

$R^S_{E_3}$ A \ A	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	0	0	0,4	0,8	0,6	0,8
Борис	0,2	0	1	1	1	1
Васил	0	0	0	0,2	0,4	0
Георги	0	0	0	0	0	0
Димитър	0	0	0	0,8	0	0,6
Емил	0	0	0,2	0,6	0	0

$R^S_{E_4}$ A \ A	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	0	1	1	0,8	0,9	0,8
Борис	0	0	0,2	0	0	0
Васил	0	0	0	0	0	0
Георги	0	0	0,2	0	0	0
Димитър	0	0,3	0,9	1	0	0
Емил	0	0	0,7	1	0	0

$R^S_{E_5}$ A \ A	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	0	0	0	0,3	0	0
Борис	0,9	0	0,7	0,1	0,6	0
Васил	1	0	0	0,2	1	0
Георги	0	0	0	0	0	0
Димитър	1	0	0	0,1	0	0
Емил	1	0,5	1	0,1	1	0

	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
φ_{E_1}	0,2	0,9	0,8	0,7	0,3	0,9
φ_{E_2}	0	0,2	0,2	0	0,4	1
φ_{E_3}	0,8	1	0	0	0	0
φ_{E_4}	1	0	0	0	0,1	0,2
φ_{E_5}	0	0,5	0	0,7	0	1

R \ A	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
Асен	1	0,9	0,8	0,7	0,4	0,9
Борис	0,9	1	0,8	0,7	0,4	1
Васил	0,8	0,8	0,8	0,7	0,4	0,8
Георги	0,7	0,7	0,7	0,7	0,4	0,7
Димитър	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
Емил	1	1	0,8	0,7	0,4	1

	Асен	Борис	Васил	Георги	Димитър	Емил
$\bar{\eta}$	0,9	1	1	1	1	1
$\bar{\bar{\eta}}$	0,9	1	0,8	0,7	0,4	1

Фиг. 33. Решение на примера от фиг. 32.

функция на принадлежност $\eta(a_i, a_j)$ $(i, j=1, 2, \ldots, m)$ се изчислява по следния начин:

$$\eta(a_i, a_j) = \sup_{E_l, E_k \in E} \{\min[\varphi_{E_k}(a_i), \varphi_{E_l}(a_j), \mu_E(E_k, E_l)]\},$$

г) Намира се размито множество „предпочитание на a_i пред a_j" над A с функция на принадлежност $\bar{\eta}(a_i)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$

$$\bar{\eta}(a_i) = 1 - \sup_{a_j \in A} [\eta(a_j, a_i) - \eta(a_i, a_j)].$$

при което, ако $\eta(a_j, a_i) - \eta(a_i, a_j)$ е отрицателно, разликата се счита равна на нула.

д) Намира се решението — размито множество над множеството A с функция на принадлежност $\bar{\bar{\eta}}(a_i)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ изчислена като $\bar{\bar{\eta}}(a_i) = \min[\bar{\eta}(a_i), \eta(a_i, a_i)]$, и даваща подреждането на обектите.

Пример: В даден конкурс участват Асен, Борис, Васил, Георги, Димитър, Емил със свои работи. Петчленно жури ги оценява. Съответните оценки, както и степените на компетентността на журито, са дадени на фиг. 32. След прилагане на подхода на Орловски (изчисленията са дадени на фиг. 33) подреждането, което се получава, е: на първо място Борис и Емил, а след тях следват: Асен, Васил, Георги, Димитър.

4.3.4. ВЗЕМАНЕ НА РЕШЕНИЯ ЧРЕЗ КОМПОЗИЦИОННОТО ПРАВИЛО НА ЗАДЕ

Композиционното правило на Заде е описано в т. 3.6.1. Заде предлага то да се използва за вземане на решения.

Задачата, която се решава, е следната. Дадено е едно размито множество A над X и една размита релация между размитите множества A и B над $X \times Y$. Търсят се стойностите на B над Y. Решението на задачата се извършва с помощта на композиционното правило на Заде.

Пример: Знаем, че спортистът A е добър спортист, че спортистите **A** и B са еднакво добри спортисти. Търсим оценка за спортиста B. Нека X и Y са множествата от оценки, $X = Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ и нека добър спортист определяме като размито множество

$A =$

2	3	4	5	6
0,1	0,1	0,5	0,9	1

а релацията R над $X \times Y$ „еднакво добри спортисти“ определяме с таблицата:

R (X \ Y)	2	3	4	5	6
2	1	0,5	0,1	0	0
3	0,5	1	0,5	0,1	0
4	0,1	0,5	1	0,5	0,1
5	0	0,1	0,5	1	0,5
6	0	0	0,1	0,5	1

Тогава, като се използва композиционното правило на Заде, се намира B над Y

$B =$

2	3	4	5	6
0,1	0,5	0,5	0,9	1

B може да се интерпретира като „сравнително добър спортист“.

Като специален вид релация може да се използва „импликацията на Заде“ (вж 3.5.5).

Пример: Дадено е, че A е сравнително ниско разположен

1 част

име	Йордан Христов Павлов
рождена дата	12.04.1932
дата на постъпване	14.03.1970
образование	висше
адрес	1000 София, ул. Толбухин 215

ключ

владеене на немски език 0,5	владеене на английски език 0,9	владеене на машинопис 0,4
способност да ръководи 0,3	познания в системния анализ 0,9	контактност 0,7

Фиг. 35. Примерен запис в кадрова информационно-търсеща система

за служителя, а във втората — характеристики за него. На фиг. 35 е даден примерен запис за един служител.

Вижда се, че втората част на даден документ представлява размито множество. Поради това някои автори се спират на различни методи за работа с такъв клас информационно-търсещи системи.

Ще покажем два начина за търсене на документи в така дефинирания клас информационно-търсещи системи чрез един пример:

Нека в информационната система има седем документа, означени с $d_1, d_2, \ldots, d_7$. В тяхното описание се срещат шест описатели $t_1, t_2, \ldots, t_6$. На фиг. 36 са дадени примерни ключове на документите.

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
t_1	0,7	0,9	1,0	0,9	0,3	0,9	1,0
t_2	0,6	0	0,8	0,8	1,0	0,7	1,0
t_3	1,0	0,8	0,7	0,7	0	0,6	0
t_4	0,9	1,0	0,5	0,4	0	0,5	0
t_5	1,0	1,0	0,1	0,3	0,5	0,1	0,5
t_6	0	0,6	0,2	0,2	0	0,2	0,1

Фиг. 36. Пример за ключовете на зададена информационно-търсеща система

Първият начин за търсене, който е описан в [27], се състои в даване на заявка от описатели, включваща думите „и", „или", „не", на които съответстват операциите между размити множества, образувани от ключовете на документите — „сечение", „обединение" и „допълнение".

Така например, ако е дадена заявката „да се намери книга, която се отнася за t_4 или t_5 и не се отнася за t_6," то тя може да се запише във вида: min [max (t_4, t_5), $1-t_6$].

За информационно-търсещата система, чиито ключове са дадени на фиг. 36, намираме размитото множество:

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
1	0,4	0,5	0,4	0,5	0,5	0,5

откъдето се вижда, че книгата d_1 е най-подходящата.

Вторият начин за търсене се състои в даване на заявка от вида: „Да се намери документ, близък по своя ключ до друг документ". Това може да бъде случай, когато е прочетена една книга и се търси друга книга в библиотеката, която е най-близка по съдържание до прочетената.

Търсенето в този случай става, като се изчислява относителното евклидово разстояние между дадената книга и останалите книги в библиотеката и се отпечатват данните за тези, за които то е минимално.

Така например, ако е дадена заявката „Да се намери книга която е най-близка до книгата d_3" за информационно-търсещата система, чиито ключове са дадени на фиг. 36, се получава:

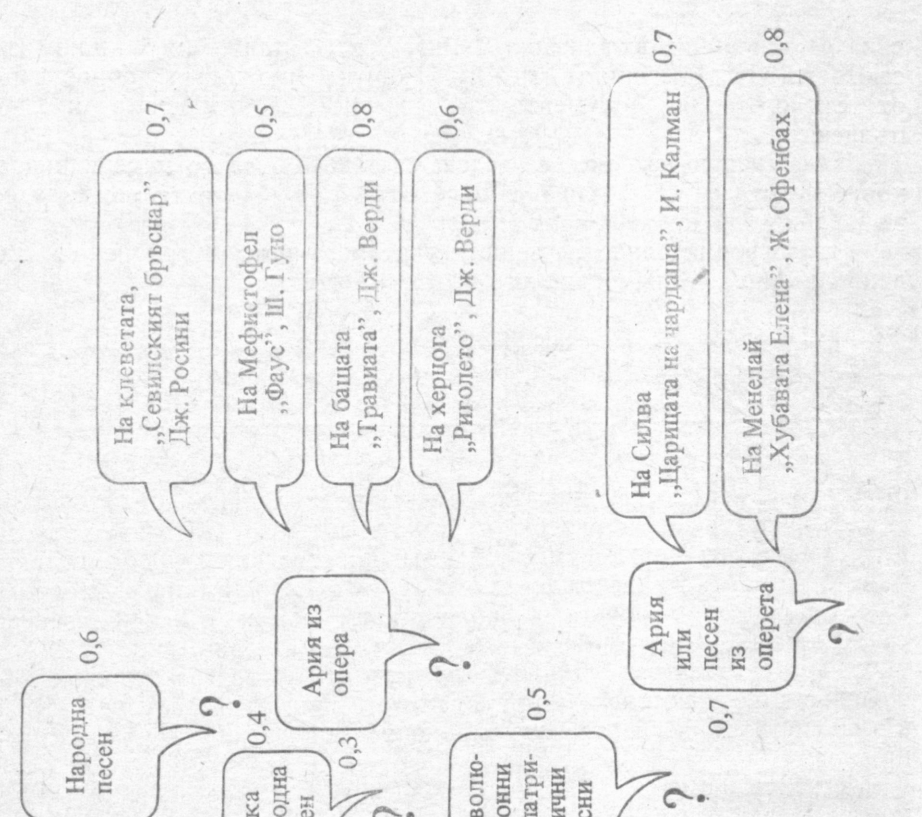
$$\varepsilon(d_3, d_1)=0{,}419;\ \varepsilon(d_3, d_2)=0{,}518;\ \varepsilon(d_3, d_4)=0{,}093;$$
$$\varepsilon(d_3, d_5)=0{,}458;\ \varepsilon(d_3, d_6)=0{,}066;\ \varepsilon(d_3, d_7)=0{,}36,$$

т. е. книгата d_6 е най-близка според описанието си до книгата d_3.

Съществуват различни алгоритмични езици за програмиране над размити множества. Най-популярните от тях са LPL, представляващ версия на езика PL/1, Фагол и FSTDS, представляващи версия на езика Фортран, размит PLANNER, представляващ версия на езика PLANNER. Една система за работа с бази от размити данни е системата FREEDOM — 0.

4.5. ПРИЛОЖЕНИЯ В УПРАВЛЕНИЕТО

Едно управление се нарича размито, ако борави с размити инструкции, т. е. с инструкции, чиито тълкувания могат да се разглеждат като елементи на размити множества. Характерна черта на размитите инструкции е, че различните изпълнители разбират една и



Фиг. 37. Пример на размитата инструкция „Изпей една песен!"

съща размита инструкция по различни начини. Друга характерна черта е, че елементите на размитите множества, съответстващи на една размита инструкция, могат да бъдат също размити множества, т. е. размити множества от тип 2.

Пример: На фиг. 37 е показано как би могла да се разбира една размита инструкция като „Изпей една песен". В този пример елементите на базовото множество са размити множества. Очевидно е, че друго лице може да разбира тази инструкция по съвсем различен начин.

4.6. ПРИЛОЖЕНИЯ В ИЗКУСТВЕНИЯ ИНТЕЛЕКТ

Интуитивно изглежда ясно, че трябва да има връзка между теорията на размитите множества и изкуствения интелект. Според Л. Заде тази връзка идва от факта, че именно неточно дефинираните понятия са ключови елементи в човешкото мислене.

Понятието размито множество е въведено при изучаване на задачи, свързани с разпознаване на образи, но работите в това направление, на базата на теорията на размитите множества, са относително малко и единна теория все още не е създадена.

Главните области на приложение на теорията на размитите множества при разпознаване на образи са свързани със задачите за анализ, съхраняване и търсене на образи [26], отстраняване на шума в изображения с различна степен на яркост, разпознаване на движещи се обекти в поредица от изображения.

При разпознаване на говор използването на теорията на размитите множества се свежда главно до лексическа класификация на думи и до семантичен анализ на изречения.

Съществените приложения на теорията на размитите множества в изкуствения интелект се свеждат главно до подпомагане на общуването човек—машина. Някои от тях са: създаване на експертни системи за управление с размити инструкции, описание на графични обекти, разпознаване на думи, управление на медицински протези.

4.7. ПРИЛОЖЕНИЯ В ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОПЕРАЦИИТЕ, МЕДИЦИНАТА И БИОЛОГИЯТА, ИКОНОМИКАТА И ГЕОГРАФИЯТА

Главните приложения на теорията на размитите множества при решаването на задачи от изследване на операциите се отнасят до разпределение на ресурси. Създадени бяха обобщения на линейното и динамичното програмиране над размити множества. Някои конкретни приложения са: решаване на задачите за разпределяне на служители по работни места в дадено предприятие, разпределяне на продукция, разпределяне на спирките на автобусната мрежа.

Пръв Л. Заде разглежда въпроса за използването на размитите множества в биологията и медицината. Основните направления, в които се прилагат, са: групиране на обекти с неточно дефинирани граници, създаване на модели на органи и процеси, протичащи в човешкия организъм, подпомагане на процеса на диагностиране на заболявания и др.

Теорията на размитите множества се прилага в икономиката и географията главно при създаване на модели и прогнози. Някои конкретни модели са на потребителското търсене, на комуникациите в селищна система и др.

4.8. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

1. Да се състави пример и да се реши, като се използва подходът на Белман — Заде за вземане на решения при дадена цел и ограничения.

2. Да се използва композиционното правило на Заде при решаване на следната задача. Дадено е „*A* е бърза кола", „*A* и *B* са еднакво бързи коли", където

$A =$

2	3	4	5	6
0	0	0,5	1	1

и е зададено над множеството X от оценки $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, а релацията — „еднакво бързи коли" съвпада с релацията „еднакво добри спортисти" от примера в раздел 4.3.4. Да се намери стойността на B над X.

3. Нека е дадено, че „*A* е сравнително чист минерал" и „ако *A* е чист минерал, то неговата цена *B* е висока". Да се определят стойностите на необходимите размити множества и релации и като се използва композиционното правило на Заде, да се намери съответното размито множество *B*.

4. Да се състави пример за вземане на решения при дадена цел и вероятностни стойности на отделните възможности, като се използва подходът на Ягер.

5. Като се използва подходът на Орловски, да се избере найдобрата между работите на Иван, Петър, Марин и Евгени, ако са зададени релациите на продпочитание R_{E_i} ($i=1, 2, 3, 4$) от четиричленно жури и релацията R_E за компетентност на журито:

R_{E_1}	Иван	Петър	Марин	Евгени
Иван	0,1	0,7	0,4	0,8
Петър	0,3	1	0,5	0,7
Марин	0,2	0,5	1	0,9
Евгени	0,2	0,3	0,2	1

R_{E_2}	Иван	Петър	Марин	Евгени
Иван	1	0,4	0,7	0,6
Петър	0,5	1	0,2	0,1
Марин	0	0,3	1	0,5
Евгени	0,4	0,7	0,6	1

R_{E_3}	Иван	Петър	Марин	Евгени
Иван	1	0,6	0,5	0,2
Петър	0,7	1	0	0,2
Марин	0,4	0,1	1	0,8
Евгени	0,5	0,1	0,1	1

R_{E_4}	Иван	Петър	Марин	Евгени
Иван	1	0	0	0,1
Петър	1	1	1	0,1
Марин	1	0,1	1	0,1
Евгени	0,9	1	0,9	1

R_E	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	1	0,7	0,5	0,3
E_2	0,3	1	0	0,7
E_3	0,5	0,1	1	0
E_4	0,4	0	0,3	1

6. Да се построи библиотечна информационно-търсеща система от описания в 4.4. тип за частна библиотека от книги по математика. Да се формулират заявки и да се провери на кои книги те съответстват.

7. Да се напишат примери на размити инструкции.

8. Как се разбира размитата инструкция „Посетете една постановка“?

УКАЗАТЕЛ НА ИЗПОЛЗВАНИТЕ ОЗНАЧЕНИЯ

1. Общи означения

Означение	Пояснение
$[\,,\,]$	затворен интервал
$\mathbf{N}$	множество на естествените числа
$\mathbf{R}$	множество на реалните числа
$\mathbf{R}^+$	множество на реалните положителни числа
$\in$	принадлежи
$\notin$, $\in$	не принадлежи
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	сума на числата $x_1, x_2, \ldots, x_n$
$\sup_{x \in A} A$	горна граница
$\inf_{x \in A} A$	долна граница
$d(x, y)$	разстояние
$\varphi : X \to Y$	изображение
$e(a, b)$	евклидово разстояние
$\min$	минимум
$\max$	максимум
(a, b)	наредена двойка
$\{\ldots\}$	множество
$\lVert r_{ij} \rVert$ $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$	таблица с n реда и m стълба

x_1 / $\chi_A(x_1)$	x_2 / $\chi_A(x_2)$	$\ldots$	x_n / $\chi_A(x_n)$

задаване на множеството $A \subset X$.

x_1 / $\mu_A(x_1)$	x_2 / $\mu_A(x_2)$	$\ldots$	x_n / $\mu_A(x_n)$

задаване на размитото множество A над X.

2. Означения, използвани при разглеждане на обикновени и размити множества

Означения, използвани при разглеждане на обикновени множества	Означения, използвани при разглеждане на размити множества	Пояснение
U	U	универсално множество
$A \subseteq B$	$A \subseteq B$	A подмножество на B
$A = B$	$A = B$	равенство на множествата A и B
$A \neq B$	$A \neq B$	различие между множествата A и B
	$\mathrm{supp}\, A$	носител на множество A
$\chi_A(x)$		характеристична функция на множеството A
	$\mu_A(x)$	функция на принадлежност на множеството A
$\overline{A}$	$\overline{A}$	допълнение на множеството A
$A \cup B$	$A \cup B$	обединение на множествата A и B
$A \cap B$	$A \cap B$	сечение на множествата A и B
	AB	алгебрично произведение на множествата A и B
	A^{α}	степен α на множеството A
	$\mathrm{CON}(A)$	концентрация на множеството A
	$\mathrm{DIL}(A)$	разтягане на множеството A
	$\mathrm{IND}(A)$	идентитет на множеството A
	A'	обикновено множество A' най-близко до размито множество A

	A_α	ниво α на размито множество A
$d(A, B)$	$d(A, B)$	хемингово разстояние между множествата A и B
$\delta(A, B)$	$\delta(A, B)$	относително хемингово разстояние между множествата A и B
	$e(A, B)$	евклидово разстояние между множествата A и B
	$\varepsilon(A, B)$	относително евклидово разстояние между множествата A и B
	$\nu(A)$	линеен индекс на размитост на множеството A

R; Y / X	y_1	y_2	. . .	y_m
x_1				
x_2				
.				
.				
.				
x_n				

R; Y / X	y_1	y_2	. . .	y_m
x_1				
x_2				
.				
.				
.				
x_n				

задаване на релация

	$\eta(A)$	квадратичен индекс на размитост на множеството A
$\overline{R}$	$\overline{R}$	допълнение на релация R
$R \cup S$	$R \cup S$	обединение на релации R и S
$R \cap S$	$R \cap S$	сечение на релации R и S
$R \circ S$	$R \circ S$	композиция на релации R и S
R^{-1}	R^{-1}	обратна релация на R
R^n	R^n	n-кратна композиция на R със себе си

	$R^{(1)}$	1-ва проекция на релацията R
	$R^{(2)}$	2-ра проекция на релацията R
	$h(R)$	проекция на релация R
	R_α	ниво α на размита релация R
	$\operatorname{supp} R$	носител на релация R
$G=\{X, \varphi\}$	$G=\{X, R\}$	граф G
u	u	дъги в граф G
Ω	X	пространство на елементарните събития
$P(A)$	$P(A)$	вероятност на събитието A

УКАЗАТЕЛ НА ОСНОВНИТЕ ИЗПОЛЗВАНИ ТЕРМИНИ

ЛИТЕРАТУРА

Книгите и статиите, отбелязани със *, се препоръчват на читателите за по-подробно запознаване с въпроси, свързани с настоящата книга.

1. Беллман, Р., Л. Заде. Принятие решений в расплывчатых условиях, сб. Вопросы анализа и процедуры принятия решений, ред. И. Шахнов, Мир, Москва, 1976 (172—215).
2. Берж, К. Теория графов и ее применение. Иностранной литературы, Москва, 1962.
3*. Божоров, Е. Множества и някои техни приложения. Народна просвета, София, 1973.
4*. Борисов, А и др. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. Зинатие, Рига, 1982.
5*. Бърнев, П. Информатика и управление. Народна просвета, София, 1978.
6. Гелерт, В., Х. Кестнер, З. Нойбер. Математически енциклопедичен речник. Наука и изкуство, София, 1983.
7. Гнеденко, Б. Беседи върху теорията на вероятностите и комбинаториката. сп. Математика, бр. 4 и 5, 1972, бр. 1, 1973.
8*. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Мир, Москва, 1976.
9*. Кузьмин, В. Построение груповых решений в пространствах четных и нечетных бинарных отношений. Наука, Москва, 1982.
10. Манолов, С. Основни видове изображения между множества и числени изображения. сп. Математика, бр. 3 и 4, 1973.
11*. Обретенов, А. Увод в теорията на вероятностите. Народна просвета, София, 1974.
12*. Орловский, С. Математика нечетности. сп. Наука и жизнь, бр. 7, 1982 (60—67).
13*. Орловский, С. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. Наука, Москва, 1984.
14. Раденски, А. Информационни системи. Народна просвета, София, 1981.
15*. Рашова, Х. Елементи на теорията на множествата и математическата логика. Наука и изкуство, София, 1972.
16. Сендов, Бл. Разстояние. сп. Математика, бр. 2, 1967.
17. Станчев, П. Що е размито множество. сп. Математика, бр. 3, 1981.
18. Adamo, Y. и др. (редактори) Bulletin pour les sous-ensembles flous et leurs applications (BUSEFAL). Université Paul Sabatier, Toulouse.
19. Dubois, D., H. Prade. Fuzzy sets aud systems. Academic press, New York, 1980.
20. Kandel, A., S. Lee. Fuzzy switching and automata. Crane Russak, New York, 1979.
21. Kaufmann, A. Introduction à la thèorie des sous-ensembles flous. Masson. Paris, 1973 (I, II, III).

(Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств, превод. Радио и связь, Москва, 1982).
22. Kickert, W. Fuzzy theories on decision-making, Martinus Nijhoft Social Sciences Division, Leiden, 1978.
23. Negoita, C. Expert systems and fuzzy systems. The Benjamin Company, 1985.
24. Negoita, C., D. Ralescu. Applications of Fussy sets system analysis. Birkhauser Verlag, Basel, 1975.
25. Negoita, C., L. Zadeh, H. Zimmermann (редактори) Fuzzy sets and systems. Nort Holland, Amsterdam — New York.
26. Rabitti, F., P. Stanchev. What can we do with images in a multi-media document filing system? AICA 84 Congresso annuale, Roma, 1984 (439—461).
27. Tadeusz, R. Fuzzy set theoretical approach to document retrieval. Information processing & Management, vol. 15, 1979.
28. Yager, R. Fuzzy sets, probabilities and decision. Journal of Cybernetics, 10 1980.
29. Yager, R. Some summary statistics on fuzzy set publication. BUSEFAL, 15, 1983.
30. Zadeh, L. Fuzzy sets, Information and control, Vol, 8, 1965, (338—353).

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава 3

Размити множества

Глава 4

Някои приложения на размитите множества

проф. *Петър Христов Бърнев*
ст. н. с. *Петър Любомиров Станчев*

РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

Рецензенти: доц. *Геро Христов Геров, Кирил Георгиев Атанасов*
Редактор *Мария Благоева*
Художник на корица *Мариана Белопитова*
Художник-редактор *Красимира Коцева*
Технически редактор *Емилия Георгиева*
Коректор *Силвия Минева*
Калиграф *Антоанета Атова*

Код: 01/9532121211/2012—4—87

Българска. Издание I. Дадена за набор на 18. XII. 1986 г. Подписана за печат на 21. XII. 1987 г. Излязла от печат на 28. XII. 1987 г. Формат 60×84/16. Печ. коли 7. Изд. коли 6,53. УИК 6,44. Тираж 4900+102. Поръчка № 2494. Цена 0,53 лв.

Държавно издателство „*Народна просвета*" — София
Държавна печатница „*Георги Димитров*" — Ямбол

КНИГИ ЗА ВАС

1. Петров, К. Ръководство за решаване на задачи по математика (Планиметрия — ч. I). 1984.
2. Петров, К. Ръководство за решаване на задачи по математика (Планиметрия — ч. II). 1984.
3. Дренски, В. Теория на групите. 1985.
4. Смълян, Р. Как се казва тази книга. 1985.
5. Кендеров, П. Изпъкнали множества. 1985.
6. Азълов, П. Фортран в примери и задачи. 1985.
7. Михайлов, В. и др. Сборник задачи по геометрия 7.—10. клас. 1986.
8. Вакарелов, Д. Игра и математика. 1986.
9. Дън, Ш. и др. Компютър за начинаещи. 1986.
10. Коларов, К. и др. Сборник задачи по алгебра 7.—10. клас. 1987.
11. Хайнацки, Р. и др. Математически състезания. 1987.
12. Чобанов, И. и др. (съст.) Български математици. 1987.
13. Ганчев, И. и др. Математически фолклор. 1987.
14. Глейзер, Г. И. Беседи по история на математиката — ч. II. 1987.
15. Азълов, П. Структури от данни. 1987.
16. Петров, К. Ръководство за решаване на задачи по математика — аритметика, алгебра, тригонометрия. 1987.
17. Станчев, П. Аз програмирам на 9 години. 1987.
18. Чобанов, И. и др. Забележителни точки в тетраедъра. 1988.
19. Глейзер, Г. И. Беседи по история на математиката — ч. III. 1988.
20. Давидов, Л. Задачи за полиноми. 1988.
21. Николов, Р. и др. Информатика за начинаещи — ч. I. 1988.
22. Проданов, И. Принцип на Дирихле. 1988.
23. Станилов, Г. и др. Нови срещи с коничните сечения. 1988.
24. Тонов, И. Приложение на комплексните числа в геометрията. 1988.
25. Серафимов, Д. и др. Справочник по математика в средното училище. 1988.

апартамент и че ако A е нискорасположен апартамент, то неговата цена B е висока. Търсим каква е цената на B.

Нека базовите множества $X=$ „етаж" е $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Y=$ „цена" е $\{10\,000, 10\,500, 11\,000, 11\,500, 12\,000\}$ и нека: A над $X=$ „сравнително ниско разположен апартамент" е зададено с размитото множество

$A =$

1	2	3	4	5
1	0,8	0,3	0,2	0,1

и релацията R над $X \times Y=$ „ако апартаментът е ниско разположен, то неговата цена е висока" (виж примера в 3.5.5) е зададена с таблицата:

R: X \ Y	10 000	10 500	11 000	11 500	12 000
1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
2	0,2	0,4	0,6	0,8	0,8
3	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1

Тогава В над Y — е размитото множество

$B =$

10 000	10 500	11 000	11 500	12 000
0,3	0,4	0,6	0,8	1

B може да се интерпретира като „сравнително висока цена".

4.4. ПРИЛОЖЕНИЯ В ИНФОРМАТИКАТА

Приложенията на теорията на размитите множества в информатиката се отнасят главно до работи, свързани с бази данни и алгоритмични езици.

Ще разгледаме един клас документални информационно-търсещи системи и използването на теорията на размитите множества в процеса на търсене на документи.

Такива системи са предназначени за търсене на документи (книги, статии, отчети, характеристики и др.). Подробно с тях читателят може да се запознае от книгата [14].

Характерно за разглеждания клас системи е, че документите се състоят от две части — стандартна част и списък на описатели със степени на принадлежност към документа.

Примери:

1. Пример за такава система представлява една библиотечна система. В стандартната част за всяка книга се съхранява заглавието ѝ, име на автора и издателството, годината на издаване, място на издаване, а във втората част се съхраняват други думи, характеризиращи основните проблеми, залегнали в книгата, и степени, показващи доколко тези думи са свързани с книгата. Например за книгата на Л. Заде [8] в информационната система може да има запис с вид, показан на фиг. 34, където в първата част са дадени данни за книгата, а във втората са записани основните понятия, срещани в книгата, и тяхната степен на принадлежност към термините в книгата. Тази втора част се нарича **ключ на записа**.

2. Пример за такава система може да представлява една кадрова система. В стандартната част за всеки служител са дадени данни

1 част

заглавие	Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений
автор	Л. А. Заде
издателство	Мир
година	1976
град	Москва

ключ

размити множества 0,9	лингвистична променлива 1	вземане на решения 0,9
лингвистика 0,5	булева алгебра 0,4	размита логика 0,6

Фиг. 34. Примерен запис в библиотечна информационно-търсеща система